

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Propriedades de derivadas conformes e derivadas fracionárias

Berenice Camargo Damasceno¹

Depto. de Matemática, Faculdade de Engenharia, Unesp, Ilha Solteira, SP

Luciano Barbanti²

Depto. de Matemática, Faculdade de Engenharia, Unesp, Ilha Solteira, SP

Lucas Ragiotto³

Depto. de Bioestatística, Instituto de Biociências, Unesp, Botucatu, SP

Resumo. As derivadas fracionárias remontam ao começo do Cálculo Diferencial no século XVIII. É contemporânea a definição de derivadas controladas (ou conformes) em relação às quais se discute serem propriamente fracionárias ou não. Tomando em consideração, neste âmbito, uma definição mais geral que as apresentadas até aqui, no sentido que especificaremos no trabalho, mostramos algumas propriedades que as distinguem como fracionárias segundo Ortigueira e Machado.

Palavras-chave. Derivadas conformes, derivadas fracionárias, linearidade, derivada identidade.

1 Introdução

1.1 As derivadas fracionárias tradicionais e conformes (ou controladas)

As derivadas não-inteiras são objeto de estudo desde a época do surgimento do Cálculo Diferencial no século XVIII [9]. A teoria continuou a ser desenvolvida pelos séculos seguintes como um campo de bons argumentos matemáticos, até que nos últimos 40 anos houve um “boom” da teoria devido à sua eficiência em aplicações, principalmente, nas mais diversas áreas tecnológicas.

Neste período, surgiram resultados de maior visibilidade sobre derivadas fracionárias e aplicações, com as derivadas $D^\alpha f$ de Riemann-Liouville, Hadamard, Caputo, e outros. Formuladas via integrais [7], levaram a várias aplicações próprias como efeito de memória e/ou não-causalidade [9].

Recentemente têm sido propostas novas formulações de derivadas chamadas pelos próprios autores, de fracionárias, mas que diante das considerações em [6], não satisfazem critérios para serem propriamente classificadas como derivadas fracionárias. São as derivadas controladas ou conformes [4]. São derivadas na forma de limites do tipo quociente de Newton modificados. As principais destas são as derivadas conformes $T^\alpha f$ de

¹berenice@mat.feis.unesp.br

²barbanti@mat.feis.unesp.br

³lucas.ragiotto@unesp.br

Khalil [5] e $f^{(\alpha)}$ de Katugampola [3]. Ambos os autores mostram as vantagens destas duas derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ respectivamente em relação as derivadas $D^\alpha f$ clássicas originais.

1.2 Objetivos

Definimos, neste trabalho, derivadas do tipo controlada denotada $C^\alpha f$ e que engloba as derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ de Khalil e Katugampola. A seguir, estudamos algumas propriedades individuais para que C^α seja propriamente fracionária segundo os critérios em [6] e [7].

2 Propriedades das derivadas D^α e conformes

Desde a introdução das derivadas não-inteiras, ao longo dos três séculos seguintes, os pesquisadores tiveram que lidar com uma série de inconsistências na teoria [3] que podem ser resumidas deste modo: dado $0 < \alpha < 1$,

- a) Exceto para a derivada de Caputo, a derivada D^α de uma constante é não nula.
- b) As derivadas D^α nem sempre satisfazem à regra do produto,

$$D^\alpha fg = gD^\alpha f + fD^\alpha g.$$

- c) As derivadas D^α nem sempre obedecem à regra usual da divisão,

$$D^\alpha(f/g) = (gD^\alpha f - fD^\alpha g)/g^2.$$

- d) As derivadas D^α não satisfazem, em geral, à regra da cadeia,

$$D^\alpha(fog)(t) = D^\alpha f(g(t)).D^\alpha g(t).$$

- e) Não é possível garantir em geral um teorema do tipo Rolle ou TVM com D^α

- f) As D^α não obedecem em geral à lei do semigrupo:

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f).$$

- g) A definição de Caputo para $D^\alpha f$ exige que a função f seja diferenciável.

No entanto vemos em [5] e [3] que estas dificuldades não ocorrem quando considerarmos as derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$.

3 Uma derivada controlada C^α geral

Vamos agora, em direção a um dos objetivos principais deste trabalho. Determinaremos aqui uma derivada controlada geral. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e os parâmetros reais $t \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\epsilon > 0$ e

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

com

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(\alpha, t; \epsilon) = 0,$$

para cada α e t fixos.

Observamos que, em geral, C^α poderia ser definida numa classe determinada de funções reais contínuas. No momento não nos ateremos particularmente a este aspecto.

Definição 3.1. *A derivada controlada (ou derivada conforme) de ordem α em relação a φ no ponto t , de f , é o operador*

$$C^\alpha[f](t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varphi(\alpha, t; \epsilon)) - f(t)}{\epsilon}.$$

Intuitivamente os incrementos da derivada são controlados por t e α . Recentemente, derivadas deste tipo foram consideradas: a T^α por Khalil e $f^{(\alpha)}$ por Katugampola. Outros autores trataram contemporaneamente de aspectos deste tipo de derivadas, [1], [10] e [2].

- A derivada controlada T^α de Khalil [5]:

Dado $0 < \alpha < 1$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua temos:

$$T^\alpha f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

- A derivada controlada $f^{(\alpha)}$ de Katugampola [3], é:

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\epsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\epsilon},$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $0 < \alpha < 1$.

Ambos os autores mostram que as derivadas $D^\alpha f$ clássica e $T^\alpha f$ por um lado, e $D^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ por outro, são idênticas para as funções fundamentais $f(t) = a^t$, $\text{sen}(t)$, $\text{cos}(t)$, exceto no caso $f(t) = t^n$ em que diferem por uma constante:

$$T^\alpha t^n = (t^n)^{(\alpha)} = nt^{n-\alpha} \text{ para } n = 1, 2, \dots \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

- Temos, então, identificando $\varphi(\alpha, t; \epsilon)$ no caso de T^α ,

$$\varphi(\alpha, t; \epsilon) = \epsilon t^{1-\alpha},$$

e no caso de $f^{(\alpha)}$,

$$\varphi(\alpha, t; \epsilon) = t(e^{\epsilon t^{-\alpha}} - 1),$$

onde as definições de T^α e $f^{(\alpha)}$, são estendidas ao campo de variação dos parâmetros na definição 3.1.

4 As propriedades de Ortigueira-Machado

Tabelas de propriedades que a derivada controlada (ou conforme), C^α , deve satisfazer para ser classificada como derivada fracionária foram estabelecidas em Ross [8] e em Ortigueira [6].

Recentemente vários autores se valeram destas tabelas para considerações sobre derivadas fracionárias (v. [1], [10], [2]).

Utilizamos neste trabalho, a tabela de propriedades em [6], por se apresentar mais abrangente.

Tais propriedades são

P1 - Linearidade: C^α é linear,

P2 - Identidade: C^0 é a identidade,

P3 - Compatibilidade sobre índices inteiros:

Se $n \in \mathbb{N}$, C^n é a n -ésima derivada usual,

P4 - Propriedade de semi-grupo:

$C^\alpha C^\beta = C^{\alpha+\beta}$, para $\alpha, \beta \geq 0$

P5 - A regra de Leibniz generalizado:

$C^\alpha [f(t) g(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D^i f(t) D^{\alpha-i} g(t)$.

Estamos agora em posição de seguir o objetivo proposto em 1.2 acima: dar condições sobre o incremento φ em C^α para termos C^α uma derivada fracionária seguindo os cinco critérios acima.

5 Propriedades dos incrementos

São mantidos aqui as notações e hipóteses feitas até agora neste trabalho.

Lema 5.1. *Para todo φ , C^α é linear.*

Dem: Devido à definição em forma de limite de C^α .

Lema 5.2. *Seja f derivável, portanto contínua, então vale $C^0 = Id$.*

Dem: Como, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(0, t; \epsilon) = 0$, podemos escrever a propriedade P2 acima, pelo teorema de L'Hospital, como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f'(t + \varphi(0, t; \epsilon)) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(0, t; \epsilon)] = f(t), \quad (1)$$

para todo $t \geq 0$.

Corolário 5.1. Se f é de classe C^1 então (1) se transforma em

$$f'(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(0, t; \epsilon) = f(t). \quad (2)$$

Dem: Neste caso (2) é uma E.D.O., cuja solução é, usando o método de variáveis separáveis,

$$f(t) = k e^{\int \frac{1}{\psi(t)} dt}$$

para $k \in \mathbb{R}$ e $\psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(0, t; \epsilon)$.

Podemos, deste modo estabelecer, o

Corolário 5.2. Se φ é derivável em relação a ϵ , e f é uma classe C^1 , considerando

$$C^\alpha : F \rightarrow \mathbb{R}$$

com

$$F = \{g; g(t) = k e^{\int \frac{1}{\psi(t)} dt}, k \in \mathbb{R}, \psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(0, t; \epsilon)\},$$

temos, $C^0 g(t) = g(t)$, para todo $g \in F$.

Dem: Imediata, do Corolário 5.1.

6 Exemplos

6.1 O caso T^α (Khalil)

Neste caso como vimos $\varphi(\alpha, t; \epsilon) = \epsilon t^{1-\alpha}$. Então φ é derivável em relação a ϵ , para todo $t \geq 0$ e $\alpha \in [0, 1]$.

No Corolário 5.2, neste caso,

$$F = \{g; g(t) = k e^{\ln t} = k.t; k \in \mathbb{R}\}.$$

6.2 O caso $f^{(\alpha)}$ (Katugampola)

Neste caso $\varphi(\alpha, t; \epsilon) = t(e^{\epsilon/t^\alpha} - 1)$.

No Corolário 5.2, neste caso,

$$F = \{g; g(t) = k.t; k \in \mathbb{R}\}$$

6.3 O caso onde $\varphi(\alpha, t; \epsilon) = Z(\epsilon) X(\alpha, t)$, em que $Z(\cdot)$ e $X(\alpha, \cdot)$ são deriváveis

Então $F = \{g; g(t) = k \frac{1}{X(0,t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1/Z'(\epsilon)}; k \in \mathbb{R}\}$.

Se Z é de classe C^1 , então

$$F = \left\{ \frac{k}{X(0, \cdot) Z'(0)}; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dem: Imediata observando a construção de F , no Corolário 5.2, acima.

Podemos agora determo-nos na consideração da propriedade P3. Seguindo as hipóteses do Corolário 5.1 acima, isto é, supondo f de classe C^1 obtemos:

$$f'(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(1, t; \epsilon) = f'(t)$$

para todo t .

Assim, podemos estabelecer:

Lema 6.1. *Se f é de classe C^1 e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(1, t; \epsilon) = 1$, então $C^1 f(t) = f'(t)$.*

7 Observação final

As propriedades P4 e P5 são demonstradas de modo usual usando como base [4].

Referências

- [1] T. Abdeljawad, *On conformable fractional calculus*. Journal of computational and Applied Mathematics, 279, 57-66, 2015.
- [2] R. Almeida, M. Guzowska, T. Odziejewicz, *A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives*. Open Mathematics, 14, 1122-1124, 2016.
- [3] U. N. Katugampola, *A new approach to generalized fractional derivatives*, B. Math. Anal. App., 6(4), 1-15, 2014. ISSN: 1821-1291.
- [4] U. N. Katugampola, *Correction to "What is a fractional derivative?" [J. of Comp. Physics 293, 15 July 2015, Pg.4-13. Special issue on Fractional PDEs]*, J. of Comp. Physics, 321, 1255-1257, 2016.
- [5] R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70, 2014.
- [6] M. D. Ortigueira, J. A. T. Machado, *What is a fractional derivative?*, J. of Comp. Physics, 293, 4-13, 2015.
- [7] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, Califórnia, 1999.
- [8] B. Ross, *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*. Fractional calculus and its applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 1-36, 1975.
- [9] J. Vanterler da C. Souza, E. Capelas de Oliveira, *On the ψ -Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 60, 72-91, 2018.
- [10] J. Vanterler da C. Souza, E. Capelas de Oliveira, *On the local M-derivative*, Prog. Fract. Differ. Appl., 4(4), 479-492, 2018.