Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Método de Galerkin Descontínuo Estabilizado aplicado ao Problema do Traçador-Passivo

Felipe A. G. Silva[1]
Eduardo Abreu[2]
Maicon R. Correa[3]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. O foco do presente trabalho consiste na aplicação de um Método de Galerkin Descontínuo Estabilizado para a aproximação numérica do modelo bidimensional do Traçador-Passivo. Especificamente, serão exploradas as boas propriedades de estabilidade local no tempo dos métodos da classe Runge-Kutta em conjunto com funções de fluxo numérico estáveis com destaque para o uso de uma estratégia de estabilização baseada na Técnica de Reconstrução do Gradiente para a estabilização do problema hiperbólico associado.

Palavras-chave.Problemas hiperbólicos, Galerkin Descontínuo, Formulação semi-discreta, Runge-Kutta, Reconstrução do gradiente.

1 Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin Descontínuo (DG, do inglês *Discontinuous Galerkin*) é uma classe dos Métodos de Elementos Finitos cuja formulação variacional permite o emprego de polinômios descontínuos por partes para compor os espaços de aproximação. O método DG combina diversas características interessantes do método de elementos finitos clássico e do método de volumes finitos, compondo uma ferramenta importante para aproximar soluções de equações diferenciais, como por exemplo, em problemas de escoamentos em meios porosos [3, 4], de dinâmica de fluidos e eletrodinâmica [2].

1.1 Lei de Conservação Hiperbólica

Seja $D = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^3$, o domínio de definição do problema estudado, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $I = [0, T]$ com $T > 0$, correspondendo as partes espacial e temporal de D, respectivamente. Considere $u(\boldsymbol{x}, t) : D \to \mathbb{R}$ a função que designa a variável conservada e a função de fluxo $\boldsymbol{f}(u) = (f(u), g(u))$ com imagem em $\mathbb{R}^2$, cujas componentes de $\boldsymbol{f}(u)$, $f(u)$ e $g(u)$, têm ambas imagem em $\mathbb{R}$. Uma lei de conservação associada a essas funções é uma equação diferencial parcial escrita na forma

$$u(\boldsymbol{x}, t)_t + \mathrm{div}(\boldsymbol{f}(u(\boldsymbol{x}, t)) = 0. \tag{1}$$

[1]felipe.augusto.guedes@gmail.com
[2]eabreu@ime.unicamp.br
[3]maicon@ime.unicamp.br

A equação (1) deverá ser acrescida de uma condição inicial e uma condição de contorno (em domínios limitados), definindo assim um problema de valor inicial e de contorno.

1.2 Nomenclatura e Definições para Problemas Discretos

Seja Ω_h uma partição fixa do domínio Ω em quadriláteros. Consideramos um subconjunto $E_j \subset \Omega_h$ como sendo um elemento de Ω_h, com $j \in \{1, 2, \cdots, M\}$. Tomando um elemento arbitrário E em Ω_h, definimos $V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$ como sendo:

$$V_h(\Omega_h, \mathbb{R}) = \left\{ v \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}) : v|_E \in V_h(E, \mathbb{R}), \forall E \in \Omega_h \right\}.$$

Para um dado instante de tempo t fixo, $u_h(\boldsymbol{x}, t) \in V_h(E, \mathbb{R})$ arbitrária e $\boldsymbol{x} \in \Omega_h$ definimos os valores internos e externos ao elemento E, respectivamente, por:

$$u_h(\boldsymbol{x}^-) \equiv u_h(\boldsymbol{x}^-, t) = \lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E} u_h(\boldsymbol{y}, t) \text{ e } u_h(\boldsymbol{x}^+) \equiv u_h(\boldsymbol{x}^+, t) = \lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \notin E} u_h(\boldsymbol{y}, t).$$

1.3 Formulação Variacional Fraca Global

Tomando uma função arbitrária $v \in V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$ multiplicamos (1) por esta função e integramos com relação a variável espacial no domínio Ω_h e utilizando integração por partes para funções de múltiplas variáveis temos que:

$$\sum_{l=1}^{M} \frac{d}{dt} \int_{E_l} u(\boldsymbol{x}, t) v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\,\Omega = \sum_{l=1}^{M} \int_{E_l} \boldsymbol{f}(u(\boldsymbol{x}, t)) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\,\Omega - \sum_{l=1}^{M} \sum_{e \in \partial E_l} \int_{e} \boldsymbol{f}(u(\boldsymbol{x}, t)) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E_l} v(\boldsymbol{x}) d\tau. \tag{2}$$

1.4 Solução Local

A construção da solução local é baseada em [2], onde a ideia básica é a hipótese de separação de variáveis. Considerando um elemento arbitrário $E \subset \Omega_h$ tomamos $V_h(E, \mathbb{R}) = \mathcal{P}_1(E, \mathbb{R})$ que é o espaço das funções espaciais, gerado pelas funções $\varphi_1^E(\boldsymbol{x}) = 1$, $\varphi_2^E(\boldsymbol{x}) = x - x_E$ e $\varphi_3^E(\boldsymbol{x}) = y - y_E$, onde o vetor $\boldsymbol{x}_E = (x_E, y_E)^t$ contém as coordenadas do baricentro do elemento E. Fixada a base $V_h(E, \mathbb{R})$ tomamos coeficientes dependentes do tempo t, denotados por $c_i^E(t)$, indicando que cada coeficiente está associado a uma função de base $\varphi_i^E(\boldsymbol{x})$. Assim, a *solução local* do elemento E é dada por:

$$u_h(\boldsymbol{x}, t)|_E = \sum_{i=1}^{3} c_i^E(t) \varphi_i^E(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in E. \tag{3}$$

1.5 Formulação Variacional Fraca Local

Para determinarmos uma aproximação $u_h(\boldsymbol{x}, t) \in V(\Omega_h, \mathbb{R})$ de $u(\boldsymbol{x}, t) \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R})$ em (1), vamos considerar a forma fraca dada em (2) restrita a um elemento arbitrário E e uma função teste arbitrária $v \in V_h(E, \mathbb{R})$, tal que para todo $E \in \Omega_h$ tenhamos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_E u_h(\boldsymbol{x}, t) v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\,\Omega = \int_E \boldsymbol{f}(u_h(\boldsymbol{x}, t)) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\,\Omega - \sum_{e \in \partial E} \int_e \boldsymbol{f}(u_h(\boldsymbol{x}, t)) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E} v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\,\tau. \tag{4}$$

A equação (4) é chamada de *formulação variacional local.* Introduzimos a função de fluxo numérico a qual que tem o papel de aproximar o termo $\boldsymbol{f}(u_h(\boldsymbol{x},t)) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E}$ em termos das quantidades $u_h(\boldsymbol{x}^-)$ e $u_h(\boldsymbol{x}^+)$ associadas ao elemento E, ou seja,

$$\widehat{f}(u_h(\boldsymbol{x}^-), u_h(\boldsymbol{x}^+)) \approx \boldsymbol{f}(u_h((\boldsymbol{x}),t)) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E},$$

onde $u_h(\boldsymbol{x}^-)$ e $u_h(\boldsymbol{x}^+)$ são as soluções no elemento E e no elemento vizinho a cada aresta $e \in \partial E$. Vamos utilizar o fluxo de Lax-Friedrichs local dado por:

$$\widehat{f}(a,b) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}(a) + \boldsymbol{f}(b)\right) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E} - \frac{\alpha_E}{2}\left(b-a\right),$$

onde α_E é uma avaliação da maior velocidade de propagação, dada por:

$$\alpha_E = \max_{min(a,b) \leq s \leq max(a,b)} \left| \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}(s) \cdot \boldsymbol{n}_{e,E} \right|,$$

com $a = u_h(\boldsymbol{x}^+)$, $b = u_h(\boldsymbol{x}^-)$ e $s \in \mathbb{R}$, onde derivada de $\boldsymbol{f}(s)$ com relação a variável u é dada por: $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u} = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u}, \frac{\partial g(u)}{\partial u}\right)$. Fixando um elemento E, vamos denotar $u_h(\boldsymbol{x},t)|_E$ simplesmente por u_h^E. Substituindo a expressão da solução local u_h^E, do fluxo numérico e como esta formulação é válida para qualquer $v \in V_h(E,\mathbb{R})$, onde $V_h(E,\mathbb{R})$ tem dimensão 3, logo a equação (4) é válida para qualquer elemento da base $V_h(E,\mathbb{R})$. Assim vamos fixar um elemento $\varphi_l^E(\boldsymbol{x})$ para algum $l = 1, 2$ ou 3. Reescrevemos (4) como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}\, c_i^E(t)}{\mathrm{d}\, t} \int_E \varphi_i^E(\boldsymbol{x}) \varphi_l^E(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\Omega &= \int_E \boldsymbol{f}(u_h^E) \cdot \nabla \varphi_l^E(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\Omega \\ &- \sum_{e \in \partial E} \int_e \widehat{f}(u_h^E(\boldsymbol{x}^-), u_h^E(\boldsymbol{x}^+)) \varphi_l^E(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

com $l = 1, 2$ e 3. A equação (5) é a notação de um sistema de equações diferenciais ordinárias sobre as variáveis $c_l^E(t)$ para cada elemento $E \in \Omega_h$ que será resolvido com um esquema da classe *Strong Stability Preserving Runge-Kutta* (SSPRK) de terceira ordem e três estágios [2].

2 Método DG Estabilizado

O método DG apresenta oscilações espúrias na presença de gradientes abruptos [2, 7], assim, para conter tais oscilações propomos uma estratégia de estabilização baseada na técnica *Reconstrução do Gradiente* [1,5,6]. Seja $\bar{u}_E$ a solução média no elemento E obtida a partir de (3) em um tempo fixo t^* dada por:

$$\bar{u}_E = \frac{1}{A_E} \int_E u_h(\boldsymbol{x}, t^*)|_E \,\mathrm{d}\,\Omega,$$

onde A_E é a área do elemento E. Para estabilizar a solução $u_h(\boldsymbol{x}, t^*)|_E$ via técnica de Reconstrução do Gradiente [1, 5–7] os ingredientes principais são: $N(E)$ é o conjunto formado pelos índices dos elementos vizinhos por vértice do elemento E, sendo que $n(N(E))$

denota a quantidade de elementos no conjunto $N(E)$; $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)$ são as coordenadas do baricentro do *i-ésimo* vizinho do elemento E, com $i \in N(E)$; $\bar{u}_i$ é a média celular no *i-ésimo* vizinho do elemento E, com $i \in N(E)$. De posse do valor $\bar{u}_E$, então uma forma de reconstruir $u_h(\boldsymbol{x}, t^*)|_E$ é utilizar a seguinte função polinomial:

$$p_E(\boldsymbol{x}) = \bar{u}_E + \beta_E \boldsymbol{g}_E \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_E), \tag{6}$$

onde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_E \in E$ e $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_E = \big(x - x_E, y - y_E\big)^t$. Note que em (6) temos elementos que compõem a geometria de E e dois graus de liberdade que são as componentes do vetor de inclinações $\boldsymbol{g}_E = \big(g_x, g_y\big)^t$. O redutor de inclinação β_E é introduzido com objetivo de reduzir oscilações espúrias que surgem no processo de estabilização de $u_h(\boldsymbol{x}, t^*)|_E$. Além disso, a reconstrução $p_E(\boldsymbol{x})$ dada em (6) tem média nula em cada elemento E [1, 5–7]. Para calcularmos as componentes de $\boldsymbol{g}_E$ vamos assumir $\beta_E = 1$ e tomando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i}$ em (6) de forma que $p_E(\boldsymbol{x_i}) = \bar{u}_i$, para cada $i \in N(E)$, obtemos:

$$\bar{u}_i - \bar{u}_E = \boldsymbol{g}_E \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_E). \tag{7}$$

Com a variação dos índices $i \in N(E)$ a equação (7) caracteriza um sistema retangular com $n(N(E))$ equações sobre as variáveis g_x e g_y. Geometricamente o sistema gerado por (7) pode ser interpretado como a busca pelos valores g_x e g_y que minimizam a diferença $|p_E(\boldsymbol{x}_i) - \bar{u}_i|^2$, para cada $i \in N(E)$. O sistema anterior com sua interpretação geométrica caracteriza um *Problema de Quadrados Mínimos*, dado por:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_1 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_{N(E)} & \Delta y_{N(E)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{u}_{N(E)} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_E$, $\Delta y_i = y_i - y_E$ e $\Delta \bar{u}_i = \bar{u}_i - \bar{u}_E$. Para aproximar g_x e g_y resolvemos o sistema (8) via Equações Normais. Para o cálculo do parâmetro β_E consideramos os valores:

$$\bar{u}_E^{min} = \min_{i \in N(E)} \{\bar{u}_i, \bar{u}_E\} \text{ e } \bar{u}_E^{max} = \max_{i \in N(E)} \{\bar{u}_i, \bar{u}_E\}.$$

Como temos interesse no controle de inclinação, analisando todos os elementos vizinhos, escolhemos os pontos $\boldsymbol{z}_i$ como sendo os baricentros dos elementos vizinhos de E. Introduzimos os valores β_E^l para cada vizinho $l \in N(E)$ do elemento E, dados por:

$$\beta_E^l = \begin{cases} \min\left\{1, \frac{\bar{u}_E^{max} - \bar{u}_E}{p_E(\boldsymbol{z}_l) - \bar{u}_E}\right\}, & \text{se } p_E(\boldsymbol{z}_l) > \bar{u}_E, \\ \\ \min\left\{1, \frac{\bar{u}_E^{min} - \bar{u}_E}{p_E(\boldsymbol{z}_l) - \bar{u}_E}\right\}, & \text{se } p_E(\boldsymbol{z}_l) < \bar{u}_E, \\ \\ 1, & \text{se } p_E(\boldsymbol{z}_l) = \bar{u}_E. \end{cases}$$

Desta forma, calculamos β_E como sendo: $\beta_E = \min\limits_{l \in N(E)} \{\beta_E^l\}$. Por fim, atualizamos os coeficientes $c_i^E(t^*)$ em (3) como: $c_1^E(t^*) = \bar{u}_E$, $c_2^E(t^*) = \beta_E g_x$ e $c_3^E(t^*) = \beta_E g_y$.

3 Problema do Traçador Passivo

Sem perda de generalidade, seja $\partial\Omega$ a fronteira de Ω, de forma que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \oslash$. Neste caso Γ_D denota a parte da fronteira de Ω na qual condições de Dirichilet são prescritas e Γ_N a parte da fronteira de Ω na qual são prescritas condições de Neumann. Tomamos $p(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ a função que designa a variável da pressão e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ a função que designa a variável da velocidade. O problema de pressão-velocidade que compõem o modelo do Traçador-Passivo é dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) &= 0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \text{ (Conservação de Massa)} \\ v(\boldsymbol{x}) &= -K\nabla p(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \text{ (Lei de Darcy)} \end{aligned} \tag{9}$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$p(\boldsymbol{x}) = p_D(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \qquad \text{e} \qquad v(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = g_N(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N, \tag{10}$$

onde K é um tensor definido-positivo em $M_2(\mathbb{R})$. O problema de pressão-velocidade será resolvido com o Método de Elementos Finitos Misto Híbrido Dual (MHD), utilizando o espaço de Raviart-Thomas de índice 0, denotado por $\mathcal{RT}_0$ [3, 4]. Acoplamos um problema de transporte, cujo o campo de velocidades é fornecido pelo problema de pressão-velocidade. A equação de transporte é dada por:

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \forall (\boldsymbol{x},t) \in D, \tag{11}$$

com as condições de fronteira e inicial dadas, respectivamente, por:

$$u(\boldsymbol{x},t) = a_D(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \text{ e } \forall t \in [0,T] \qquad \text{e} \qquad u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_h. \tag{12}$$

Para a resolução do problema de transporte vamos utilizar o método DG estabilizado via a técnica de Reconstrução do Gradiente discutido anteriormente. Vamos considerar as seguintes condições de contorno para o problema de pressão-velocidade:

$$p(\boldsymbol{x}) = 1 \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_1, \ p(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_3, \ v(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_2 \text{ e } \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_4. \tag{13}$$

As condições de contorno e inicial para o problema de transporte são dadas por:

$$u(\boldsymbol{x},t) = 1, \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_1 \text{ e } \forall t \in [0,T] \qquad \text{e} \qquad u(\boldsymbol{x},0) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_h. \tag{14}$$

Tomaremos os seguintes valores de permeabilidade:

$$K = 10^{-6} I \text{ se } \boldsymbol{x} \in Z_1 \text{ ou } \boldsymbol{x} \in Z_3 \qquad \text{e} \qquad K = I \text{ se } \boldsymbol{x} \in Z_2,. \tag{15}$$

onde $Z_1 = [0, 0.2] \times [0, 0.8]$, $Z_3 = [0.7, 1.0] \times [0.2, 0.8]$ e $Z_2 = \Omega_h \setminus (Z_1 \cup Z_3)$. Utilizamos malhas quadrilaterais trapezoidais com 10×10 elementos. Para a equação de transporte trabalharemos com o esquema SSPRK de três estágios e terceira ordem de forma a garantir boa estabilidade temporal, com o número de Courant $\nu = 0.3$ e tempo total de simulação $T = 3.0$. A Figura 2 indica o bom comportamento do problema de pressão-velocidade quando utilizamos o MHD escolhendo o espaço $\mathcal{RT}_0$. O campo de velocidades obtido nos dá indicativos da direção de deslocamento na equação de transporte. As soluções para a equação de transporte (saturações) exibidas na Figura 2 são estáveis e não geram gradientes abruptos e/ou oscilações tendo em vista a combinação de uma malha de trapézios e o espaço de aproximação $\mathcal{P}_1(E, \mathbb{R})$.

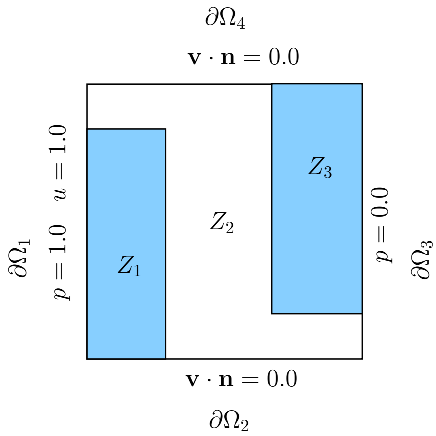
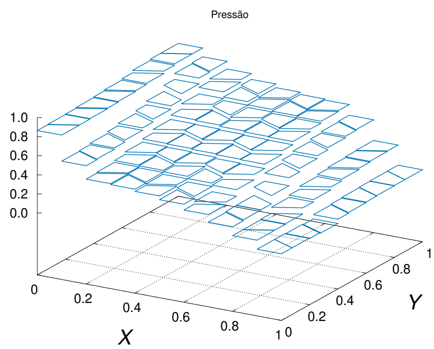
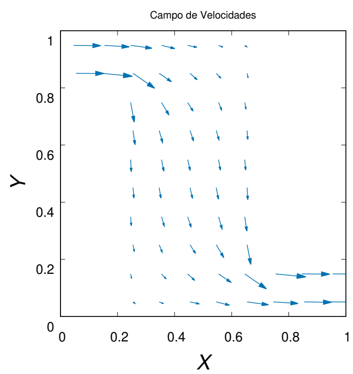


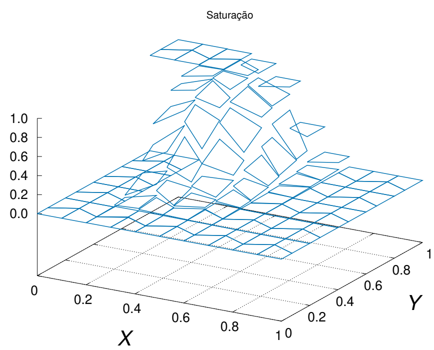
Figura 1: Condições de Contorno para Simulação do modelo do Traçador-Passivo.



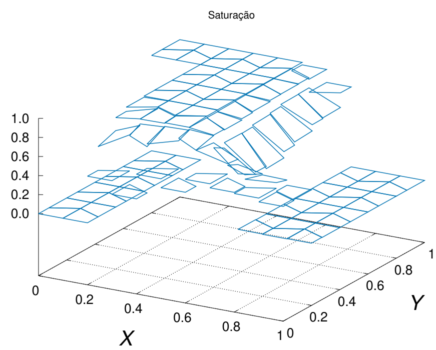
(a) Pressão



(b) Campo de Velocidades



(c) Saturação em $T = 1.0$



(d) Saturação em $T = 3.0$

Figura 2: Resultados Numéricos para Simulação do modelo do Traçador-Passivo.

4 Conclusões

A utilização do método DG e de esquemas de evolução temporal da classe SSPRK combinados a estabilização via a técnica de Reconstrução do Gradiente forneceram bons resultados para o problema de transporte acoplado ao modelo do Traçador-Passivo. Além disso, temos uma relação estável entre o MHD e o método DG estabilizado.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da CAPES e do CNPq, juntamente com o PPG em Matemática Aplicada e Computacional do IMECC/UNICAMP, pelo apoio via uma bolsa institucional de Doutorado CAPES no período de 08/2015 à 08/2016 e do CNPq no período de 09/2016 até o 03/2019.

Referências

[1] T. J. Barth and D. C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes, *AIAA* paper 89-0366, January, 1989.

[2] B. Cockburn and C. Shu. The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 141:199-224, 1998. DOI: 10.1006/jcph.1998.5892.

[3] M. R. Correa and M. R. Borges. A semi-discrete central scheme for scalar hyperbolic conservation laws with heterogeneous storage coefficient and its application to porous media flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73:205–224, 2013. DOI: 10.1002/fld.3794.

[4] M. R. Correa. A Semi-Discrete Central Scheme for Incompressible Multiphase Flow in Porous Media in Several Space Dimensions, *Mathematics and Computers in Simulation*, 140:24–52, 2017. DOI 10.1016/j.matcom.2017.01.008

[5] D. Dutykh, R. Poncet and F. Dias. The VOLNA code for the numerical modeling of tsunami waves: Generation, propagation and inundation, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 30.6:598-615, 2011. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2011.05.005

[6] C. Michalak and C. Ollivier-Gooch. Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations, *Journal of Computational Physics*, 228:8693-8711, 2009. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.08.021.

[7] F. A. G. Silva, E. Abreu and M. R. Correa. Métodos de Galerkin Descontínuo de Mais Alta Ordem para Leis de Conservação Hiperbólicas, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0291.

