Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O problema de corte de estoque associado ao problema de minimizar o número de pilhas abertas

Fernanda Luiz Teixeira [1]
IMECC, UNICAMP, Campinas, SP
Kelly Cristina Poldi [2]
IMECC, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Problemas de corte de estoque consistem em otimizar processos de corte de objetos maiores, disponíveis em estoque, em itens menores para a produção de determinados produtos, de forma a atender a uma demanda solicitada. Durante o processo de corte, cada item diferente cortado gera uma pilha ao redor da máquina de corte. Neste trabalho, tratamos o problema de corte de estoque associado ao problema de minimizar o número de pilhas abertas. Apresentamos um modelo matemático, implementamos e realizamos testes computacionais para validação do modelo.

Palavras-chave. Otimização linear inteira, modelagem matemática, problema de corte de estoque, número de pilhas abertas.

1 Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em otimizar o corte de objetos maiores, disponíveis em estoque, em itens menores para a produção de determminados produtos, de forma a atender a uma demanda. O objetivo é otimizar alguma função conveniente, como minimizar custos ou desperdícios ou maximizar lucro, de forma a atender as demandas de todos os itens. Define-se por padrão de corte cada maneira diferente de cortar um objeto. Este problema pode ser modelado como um problema de otimização linear inteira, que consiste em determinar os possíveis padrões de corte e as variáveis de decisão representam a frequência de cada padrão de corte. Dentre as várias aplicações dos problemas de corte, podemos citar o corte de móveis, de aço, de papel, de vidro etc.

Cada novo item cortado no processo de corte abre uma nova pilha, que só será fechada quando o último padrão de corte que contém este item é cortado. Em geral, o espaço físico ao redor da máquina de corte é limitado, o que torna impraticável abrir muitas pilhas ao mesmo tempo. Surge assim o problema de sequenciamento de padrões de corte associado ao problema de corte, cujo o objetivo é minimizar o número máximo de pilhas abertas durante o processo de corte (MOSP, do inglês *Minimization of Open Stack Problem*).

[1]fernanda.teixeira@ifsp.edu.br
[2]kellypoldi@ime.unicamp.br

O problema de corte de estoque passou a ter mais destaque a partir dos trabalhos de Gilmore & Gomory [5, 6], que propuseram uma técnica de geração de colunas (padrões de corte) para obtenção de padrões de corte candidatos a solução do problema. Dentre os estudos sobre o problema de corte, apontamos os autores Dyckhoff (1981, 1990), Valério de Carvalho (1990), Stadtler (1990), Wäscher & Gau (1996), Arenales *et al.* (1999) que trouxeram grandes contribuições.

Apesar de ser um problema relevante, não existem muitos trabalhos na literatura focados no problema de corte associado ao MOSP. Os primeiros trabalhos a tratarem especificamente do problema de corte com sequenciamento, Dyson & Gregory [3] e Madsen [7], visavam minimizar o número de descontinuidades (MDP, do inglês *Minimization of Discontinuities*), e utilizaram um procedimento em dois estágios, onde no primeiro estágio o problema de corte de estoque é resolvido pelo método de Gilmore & Gomory [5, 6] e no segundo estágio os padrões gerados são sequenciados de forma ótima. Como os objetivos dos dois problemas em questão são na maioria das vezes conflitantes, essa forma independente e sequencial de resolução, pode gerar soluções infactíveis.

Mais recentemente, o problema de corte associado ao sequenciamento passou a ser tratado de forma integrada, como nos trabalhos de Pileggi [8], Armbruster [1], Pinto [9] e Belov & Scheithauer [2]. A forma integrada mostrou-se mais eficiente do que a abordagem anterior, pois apesar de também ser solucionada através de estágios, a forma integrada associa os problemas através de uma restrição que usa informações do primeiro estágio como limitante. Dessa forma, os problemas são interligados e evitando a ocorrência de soluções infactíveis.

2 Definição e Modelagem Matemática do Problema

Os problemas de corte e de sequenciamente de padrões de corte são problemas difíceis de serem resolvidos de forma ótima, ditos NP-difíceis. Combiná-los em um único problema se torna pelo menos tão difícil quanto. Em geral, eles eram abordados de forma independente e sucessiva, o que pode resultar em soluções infactíveis. Isto porque o problema de gerar padrões de corte no problema de corte e de sequenciamente estão interligados apesar de terem objetivos distintos de importância equivalente e, muitas vezes, conflitantes.

Além dos objetivos do PCE e do MOSP, na formulação do nosso modelo consideramos mais um objetivo, o de minimizar o tamanho da sequência, para garantir que o sequenciamento dos padrões de corte seja feito de forma ordenada e que padrões de corte não utilizados não sejam sequenciados.

A formulação apresentada a seguir é baseada na formulação apresentada por Pinto [9] para o problema na forma integrada, com a proposta de não usar um limitante para o número máximo de pilhas abertas. Para isso vamos considerar:

- N número total de diferentes padrões de corte;
- M número total de diferentes itens;
- K número suficientemente grande;

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0412

- c_j custo do padrão $j, \quad j = 1, \ldots, N$;
- d_i demanda de cada item $i, \quad i = 1, \ldots, M$;
- $A_{i,j}$ é a quantidade de itens do tipo i no padrão de corte j.
- y_j variável de decisão que define a frequência que o objeto é cortado de acordo com o padrão de corte $j, \quad j = 1, \ldots, N$;
- a_j vetor $M \times 1$ de $1's$ e $0's$ que informa se o item do tipo i está presente no padrão de corte j ou não, isto é,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } A_{i,j} > 0 \quad \text{no padrão de corte } a_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- k representa o instante imediatamente após o processamento do k-ésimo padrão de corte;
- e vetor auxiliar $1 \times M$ de $1's$;
- $x_{j,n} = \begin{cases} 1, & \text{se o padrão } j \text{ é o } k\text{-ésimo padrão de corte na sequência;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- v_j variável auxiliar binária que relaciona as variáveis y_j e $x_{j,k}$.
- W_k variável $M \times 1$ binária que fornece as pilhas que estão abertas imediatamente após o corte do k-ésimo padrão de corte;
- P_k variável $M \times 1$ binária que fornece as novas pilhas formadas imediatamente após o corte do k-ésimo padrão e anterior ao corte do $(k+1)$-ésimo padrão de corte.

Assim, a formulação do problema é dada por:

minimizar

$$Z = \sum_{j=1}^{N} (c_j y_j) \; + \; \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} k x_{j,k} + \; \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} W_{i,k} \tag{1}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{N} A_{i,j} y_j \geq d_i, \quad i = 1, ..., M \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} e^t P_k \leq M \tag{3}$$

$$W_{i,(k-1)} - W_{i,k} \leq P_{i,k}, \quad i = 1, ..., M; k = 1, ..., N-1 \tag{4}$$

$$e^t W_k \leq M, \quad k = 1, ..., N \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{j,k} \leq 1, \quad k = 1, ..., N \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_{j,k} = v_j, \quad j = 1, ..., N \tag{7}$$

$$x_{j,k} A_{i,j} + (v_j - 1) A_{i,j} \leq W_{i,j}, \quad i = 1, ..., M; j = 1, ..., N; k = 1, ..., N \tag{8}$$

$$v_j \leq y_j, \quad j = 1, ..., N \tag{9}$$

$$K v_j \geq y_j, \quad j = 1, ..., N \tag{10}$$

$$v_j \in \{0, 1\}; \ \ y_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, ..., N \tag{11}$$

$$x_{j,k} \in \{0, 1\}, \quad j = 1, ..., N; k = 1, ..., N \tag{12}$$

$$P_{i,k} \in \{0, 1\}; \ \ W_{i,k} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., M; \ \ k = 1, ..., N. \tag{13}$$

A função objetivo (1) minimiza o número de objetos cortados, o número de sequenciamentos (evitando que sejam sequenciados instantes sem cortes) e o número de pilhas abertas duranto todo o processo. Ao minimizarmos o número de pilhas abertas durante todo o processo, conseguimos obter o menor número possível de pilhas abertas em cada instante. As restrições (2) impõem que a demanda de todos os itens seja atendida. Observe que, um padrão de corte $(A_{i,j})$ satifaz as restrições de um problema da mochila, ou seja, $\sum_{i=1}^{M} \ell_i A_{i,j} \leq L, A_{i,j} \in \mathbb{Z}^+$, onde L é o comprimento do objeto e ℓ_i é o comprimento do item tipo $i, i = 1, \ldots, M$.

A restrição (3) garante que não serão abertas mais que M pilhas por instante. Note que P_k fornece as novas pilhas formadas ao final do instante k para iniciar instante $k+1$, por este motivo usamos $k = 1, \cdots, N-1$.

As retrições (4) indicam as pilhas novas produzidas após o processamento do k-ésimo padrão de corte. As restrições (5) garantem que o sequenciamento não abrirá mais que M pilhas. As restrições (6) e (7) garantem que todos os padrões de corte selecionados sejam processados uma única vez em uma única ordem da sequência. As restrições (6) impõem que o padrão de corte j deve ser processado em alguma ordem na sequência, enquanto que as restrições (7) impõem que apenas um dos padrões de corte selecionados seja processado na k-ésima ordem na sequência. As restrições (7) também garantem que se o padrão de corte k não for utilizado no processo de corte ($y_j = 0$ e $v_j = 0$), ele não será selecionado para o sequênciamento.

As restrições (8), (9), (10) e (11) relacionam a solução do problema de corte com a solução do problema de sequenciamento. Assim, se o padrão de corte j é cortado ($y_j > 0$), as restrições (9) e (10) definem $v_j = 1$ e, com isto, as restrições (8) garantem a existência de uma pilha para cada item cortado no k-ésimo instante. Caso o padrão de corte j não seja selecionado para ser utilizado, as restrições (8) se tornam redundantes. As restrições (11), (12) e (13) garantem as condições de integralidade e não-negatividade das variáveis.

3 Testes computacionais

Um metodo de geração de colunas para modelo proposto (1)-(13) foi implementado em linguagem Julia 0.6.2 usando o *solver* CPLEX 12.6.2. Para os testes computacionais preliminares, foram utilizadas 10 classes com 10 instâncias em cada uma, baseadas no gerador proposto na literatura: CUTGEN1 [4]. Para a geração das instâncias-testes, consideramos objetos em estoque de dimensão $L = 1000$. As demais características das instâncias são apresentadas, na Tabela 1, onde a segunda coluna apresenta o número de tipos de itens (m), a terceira coluna apresenta o intervalo no qual foi gerado o comprimento dos itens demandados (ℓ_i) e a última coluna apresenta a demanda média dos itens (d_i).

Tabela 1: Características das instâncias.

Classe	m	ℓ_i	d_i
1	10	$[10, 200]$	10
2	10	$[10, 200]$	100
3	20	$[10, 200]$	10
4	20	$[10, 200]$	100
5	40	$[10, 200]$	10
6	40	$[10, 200]$	100
7	10	$[10, 800]$	10
8	10	$[10, 800]$	100
9	20	$[10, 800]$	10
10	20	$[10, 800]$	100
11	40	$[10, 800]$	10
12	40	$[10, 800]$	100

Os testes computacionais são apresentados na Tabela 2, onde a coluna "Objetos" denota a taxa média de objetos utilizados em cada classe; a coluna "Padrões" apresenta a taxa média de diferentes padrões utilizados em cada classe; a coluna "Max. Pilhas" exibe a taxa média do maior número de pilhas abertas por instante em cada classe; a coluna "Custo" denota a taxa média de custo em cada classe e a coluna "Tempo (seg)" apresenta a taxa média do tempo computacional de cada classe em segundos.

Podemos observar nos resultados apresentados na Tabela 2 que o modelo é válido e atinge o objetivo para o qual foi proposto, ou seja, resolve o problema de corte de estoque minimizando o número de objetos cortados (i.é, a matéria-prima utilizada) com um número pequeno de pilhas abertas, que foi de quatro pilhas, em média. Se o modelo matemático não levasse em conta a minimização do número de pilhas abertas, nas classes 1 e 2, até 10 pilhas poderiam ter sido abertas. Na apresentação, mostraremos gráficos comparando a solução do modelo clássico, ou seja, sem a preocupação de abrir poucas pilhas, com o

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0412

Tabela 2: Média dos resultados obtidos.

Classe	Objetos	Padrões	Max. Pilhas	Custo	Tempo (seg.)
1	18,50	4,25	3,75	40,63	11,65
2	118,67	5,89	3,78	153,44	10,17
3	44,10	8,40	4,20	106,8,	270,76
4	246,30	12,50	4,40	360,00	436,14
5	102,30	17,10	4,50	290,90	6161,34
6	-	-	-	-	-
7	53,30	5,90	2,90	85,30	3,06
8	506,40	6,70	3,10	545,30	4,15
9	110,60	11,60	3,10	206,10	69,58
10	1025,90	13,40	3,10	1149,50	75,40
11	207,50	20,50	3,87	473,12	7622,17
12	-	-	-	-	-

modelo proposto. Note que o *solver* não conseguiu resolver todas as instâncias das classes 6 e 12 que possuem o maior número de itens e demanda.

4 Comentários Finais e Propostas Futuras

Este trabalho apresentou um modelo matemático para o problema de corte de estoque que minimiza a perda de material no processo e, também, minimiza o número de pilhas abertas durante o processo de corte. Na literatura, até então, este problema foi resolvido em duas fases, ou seja, primeiro resolve-se o problema de corte de estoque e, com os padrões de corte conhecidos, em uma segunda etapa, eles são sequenciados com o objetivo de minimizar o número de pilhas abertas. Neste trabalho, implementamos um método de geração de colunas que resolve ambos os problemas ao mesmo tempo, ou seja, a geração e o sequenciamento dos padrões de corte. Desta forma, são obtidos padrões de corte mais eficientes pois o sequenciamento é considerado, pelo modelo, durante o processo de geração dos padrões de corte. Como continuidade deste trabalho, pretende-se tratar o PCE associado ao sequenciamento MOSP de forma biobjetivo, ou seja, o objetivo é minimizar $\{f(\boldsymbol{y}); g(\boldsymbol{w})\}$, onde $f(\boldsymbol{y})$ é a função referente ao número de objetos cortados (perda no corte) e $g(\boldsymbol{w})$ é a função referente ao número de pilhas abertas durante o processo de corte, a fim determinar e analisar a curva de Pareto referente ao modelo.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo $140783/2018-0$ e da FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo $2016/01860-1$.

Referências

[1] M. Armbruster. A solution procedure for a pattern sequencing problem as part of a one-dimensional cutting stock problem in the steel industry, *European Journal of Operational Research*, 141:328-340, 2002. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00128-5.

[2] G. Belov and G. Scheithauer. Setup and Open-Stacks Minimization in One-Dimensional Stock Cutting, *INFORMS Journal on Computing*,19:27-35, 2007. DOI: 10.1287/ijoc.1050.0132.

[3] R. G. Dyson and A. S. Gregory. The cutting stock problem in the flat glass industry, *Journal of the Operational Research Society*, 25:41-53, 1974. DOI: 10.1057/jors.1974.5.

[4] T. Gau and G. Wäscher. CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem, *European Journal of Operational Research*, 84:572-579, 1995. DOI: 10.1016/0377-2217(95)00023-J.

[5] P. C. Gilmore and R. E. Gomory. A linear programming approach tthe cutting-stock problem, *Operations Research*, 9(6):849-859, 1961. http://www.jstor.org/stable/167051.

[6] P. C. Gilmore and R. E. Gomory. A linear programming approach tthe cutting-stock problem-Part II, *Operations Research*, 11(6):863-888, 1963. DOI: 10.1287/opre.11.6.863.

[7] O. B. Madsen. An application of travelling-salesman routines to solve pattern-allocation problems in the glass industry, *Journal of the Operational Research Society*, 39:249-256, 1988. DOI: 10.1057/jors.1988.42.

[8] G. C. F. Pileggi. Abordagens para otimização integrada dos problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte. Tese de Doutorado, ICMC/USP, 2003.

[9] M. J. Pinto. Algumas contribuições à resolução do problema de corte integrado ao problema de seqüenciamento dos padrões. Tese de Doutorado, INPE, 2004.