Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização dos polinômios ortogonais de Jacobi e monotonicidade de seus zeros

Angelica Lourenço Oliveira[1]
Universidade Estadual de Campinas
Fernando Rodrigo Rafaeli[2]
Universidade Federal de Uberlândia

Resumo. O objetivo deste trabalho é apresentar uma caracterização detalhada dos Polinômios Ortogonais Clássicos, em particular os de Jacobi, através das Equações do Tipo Hipergeométrica. Para isso, apresentaremos uma classe de equações diferenciais e estudaremos algumas de suas soluções. Mostraremos que sob certas condições e utilizando as características dos coeficientes das equações desse tipo, conseguimos encontrar soluções particulares específicas que são polinômios. Apresentaremos uma relação de ortogonalidade destas soluções polinomiais e algumas condições para que estas formem uma sequência de Polinômios Ortogonais Clássicos, e então estabeleceremos uma representação dos Polinômios Jacobi. Por fim, faremos um estudo sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Jacobi utilizando o Teorema Clássico de Stieltjes.

Palavras-chave. Polinômios Ortogonais, Fórmula de Rodrigues, Polinômios de Jacobi, Monotonicidade de zeros, Teorema de Stieltjes.

1 Introdução

Os Polinômios Ortogonais Clássicos, a saber, os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite, formam uma classe de funções especiais, ver em [1]. Pela Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite, podemos chegar a uma representação integral para outras funções especiais da física e matemática, como por exemplo, funções hipergeométricas e funções de Bessel. A ideia utilizada na construção dos polinômios ortogonais clássicos de variável contínua pode naturalmente ser generalizada aos polinômios ortogonais clássicos de variável discreta.

As funções do tipo hipergeométricas podem ser utilizadas para caracterizar os polinômios ortogonais clássicos. Desta forma, a seguir vamos introduzir o conceito de equações do tipo hipergeométrica.

[1]angelicaeh@ufu.br
[2]rafaeli@ufu.br

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0361

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 7, n. 1, 2020.

1.1 Equações do Tipo Hipergeométrica

Sejam $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ polinômios de grau no máximo dois e um, respectivamente, e λ uma constante. Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

é denominada equação do Tipo Hipergeométrica. Esta equação é também conhecida como Equação Diferencial de Bochner.

As soluções de uma equação do tipo hipergeométrica são chamadas de funções do tipo hipergeométrica.

Uma propriedade importante sobre estas equações é que todas as derivadas das funções do tipo hipergeométrica são também funções do tipo hipergeométricas. Em outras palavras, se $y(x)$ é solução da equação (1), então $v_n(x) = y^{(n)}(x)$ é solução da equação

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0, \tag{2}$$

onde $\tau_n(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e μ_n uma constante, dados por

$$\tau_n(x) = n\sigma'(x) + \tau(x) \qquad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \tag{3}$$

Podemos provar que a recíproca também é verdadeira, isto é, toda solução de (2), com $\mu_k \neq 0$, $k = 1, ..., n-1$, pode ser representada da forma $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, onde $y(x)$ é uma solução de (1). Tais resultados podem ser encontrados com mais detalhes em [2].

As soluções particulares para a equação (1) são encontradas tomando $\mu_n = 0$, ou seja $\lambda = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$. A equação (1) tem uma solução particular da forma $y(x) = y_n(x)$, que é um polinômio de grau n, uma vez que a equação $\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' = 0$ tem uma solução particular dada por $v_n(x) = k$, sendo k uma constante e $v_n(x) = y^{(n)}(x)$.

1.2 Fórmula de Rodrigues

Os polinômios de grau n que são soluções da equação do tipo hipergeométrica são denominados polinômios do tipo hipergeométrico. Tais polinômios podem ser dados explicitamente utilizando o resultado da proposição a seguir, considerando que $\rho(x)$ e $\rho_n(x)$ satisfazem as seguintes equações, conhecidas como Equações de Pearson,

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x) \qquad (\sigma(x)\rho_n(x))' = \tau_n(x)\rho_n(x). \tag{4}$$

Proposição 1.1. ***(Fórmula de Rodrigues)*** *Se $y_n(x)$ for uma função polinomial de grau exatamente n, solução da Equação (1) e $y_n^{(m)}(x) = v_m(x)$ sua derivada $m-$ésima, solução da Equação (2), então $y_n(x)$ e $y_n^{(m)}(x)$ são dados explicitamente por*

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}[\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)}, \tag{5}$$

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_m B_n}{\sigma^m(x)\rho(x)}[\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n-m)},$$

onde $B_n = \dfrac{y_n^{(n)}(x)}{A_n}$ *é uma constante normalizadora e* $A_m = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k, \quad A_0 = 1.$

As soluções polinomiais de (1) formam uma sequência de polinômios ortogonais $y_n(x)$, com relação a função peso $\rho(x)$. Se para todo $k \geq 0$, valer $\sigma(x)\rho(x)x^k = 0$ para os valores de $x = a$ e $x = b$, então sua ortogonalidade é definida por

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx = \delta_{mn}d_n^2. \tag{6}$$

O termo d_n denota a norma do polinômio $y_n(x)$.

Os polinômios do tipo hipergeométrico $y_n(x)$, aos quais a função $\rho(x)$ satisfaz a condição $\sigma(x)\rho(x)\,x^k = 0$, para todo $k \geq 0$ e $x = a$, $x = b$, são conhecidos como Polinômios Ortogonais Clássicos. Usualmente, são também exigidas as condições adicionais $\rho(x) > 0$ e $\sigma(x) > 0$, para x no intervalo (a, b).

Para cumprir a condição de ortogonalidade, é suficiente exigir que a função $\rho(x)$ satisfaça a seguinte condição de fronteira

$$\sigma(a)\rho(a) = 0 \qquad \sigma(b)\rho(b) = 0. \tag{7}$$

Outro resultado importante é que todas as derivadas dos polinômios ortogonais clássicos $y_n^{(k)}(x)$, solução de (2), formam uma sequência de polinômios ortogonais clássicos com relação a $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$ no intervalo (a, b), e sua ortogonalidade é dada por

$$\int_a^b y_m^{(k)}(x)y_n^{(k)}(x)\rho_k(x)dx = \delta_{mn}d_{kn}^2,$$

onde d_{kn} é a norma do polinômio $y_n^{(k)}(x)$.

2 Caracterização dos Polinômios de Jacobi

Em consequência da Fórmula de Rodrigues, fazendo $n = 1$ em (5) e utilizando a equação (4), temos que

$$y_1(x) = \frac{B_1}{\rho(x)}[\sigma(x)\rho(x)]' = \frac{B_1}{\rho(x)}[\tau(x)\rho(x)] = B_1\tau(x).$$

Portanto, $\tau(x)$ é um polinômio de grau um, ou seja, $\tau(x) = Ax + B$, $A \neq 0$. Logo, temos três opções para $\sigma(x)$, quando ela tem grau igual a 2, 1 e 0. Neste trabalho, iremos nos limitar ao estudo da função $\sigma(x)$ quando seu grau é exatamente igual a 2.

2.1 Polinômio de Jacobi

Utilizando a condição $\sigma(t) > 0$, $t \in (a, b)$, podemos supor que $\sigma(t) = (t-a)(b-t)$, com $t \in (a, b)$. Fazendo a mudança de variável $t = (a+b)/2 + x(b-a)/2$, podemos reescrever $\sigma(x) = 1 - x^2$ no intervalo $(-1, 1)$. Como $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$ então

$$\frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)\rho(x)}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}.$$

Integrando a igualdade anterior, temos que

$$\ln\,\sigma(x)\rho(x) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx,$$

com $\tau(x) = Ax + B$ e $\sigma(x) = 1 - x^2$, $x \in (-1, 1)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\ln\,\sigma(x)\rho(x) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx = \int \frac{Ax + B}{1 - x^2}dx = \int \frac{Ax + B}{(1 - x)(1 + x)}dx \\
&= \frac{B - A}{2}\int \frac{1}{1 + x}dx + \frac{A + B}{2}\int \frac{1}{1 - x}dx \\
&= \frac{B - A}{2}\ln(1 + x) - \frac{A + B}{2}\ln(1 - x) \\
&= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\ln\,\sigma(x)\rho(x) = \ln\,\sigma(x) + \ln\,\rho(x) = \ln(1 - x^2) + \ln\,\rho(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\ln\,\rho(x) &= \ln\,\sigma(x)\rho(x) - \ln(1 - x^2) \\
&= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}} - \ln(1 - x) - \ln(1 + x) \\
&= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}-1}(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}-1},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\rho(x) = (1 + x)^{\frac{B-A-2}{2}}(1 - x)^{-\frac{A+B+2}{2}}.$$

Fazendo

$$\beta = \frac{B - A - 2}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{A + B + 2}{2},$$

concluímos que $A = -(\alpha + \beta + 2)$ e $B = \beta - \alpha$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha \\
&\rho(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \quad \alpha, \beta > -1, \ \ x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

Neste caso, o polinômio correspondente $y_n(x)$ com $B_n = (-1)^n/2^n n!$ é chamado de *Polinômio de Jacobi* [3] e é denotado por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Note que $\sigma(-1)\rho(-1) = 0$ e $\sigma(1)\rho(1) = 0$. Logo, a condição de fronteira (7) e a propriedade de ortogonalidade (6) para o polinômio de Jacobi e suas derivadas, são satisfeitas em $(-1, 1)$ quando $\beta > -1$ e $\alpha > -1$. Daí, pela Fórmula de Rodrigues,

$$\begin{aligned}
y_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{B_n}{\rho(x)}[\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{[(1 - x^2)^n(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}]^{(n)}}{(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{[(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}]^{(n)}}{(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}}.
\end{aligned}$$

[3] A constante B_n neste caso foi escolhida como $(-1)^n/2^n n!$. Mas, em geral elas podem ser escolhidas arbitrariamente.

3 Monotonicidade dos zeros dos polinômios de Jacobi

O resultado a seguir que se encontra em [3], é conhecido como Teorema de Stieltjes. Este resultado nos fornece uma forma de analisar a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos utilizando as equações hipergeométricas. Sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 3.1. ***(Teorema de Stieltjes)*** *Dada uma função $y(x,t)$ solução polinomial da equação diferencial da forma*

$$y'' + P(x,t)y' + Q(x,t)y = 0.$$

Seja $P(x,t)$ uma função decrescente de x para cada t. Se $P(x,t)$ for uma função diferenciável decrescente (resp. crescente) de t para cada x, então os zeros de $y(x,t)$ decrescem (resp. crescem) quando t cresce.

Podemos utilizar Teorema de Stieltjes para verificar a monotonicidade dos zeros polinômios ortogonais clássicos de Jacobi. Para isso, a equação diferencial de segunda ordem definida em (1) deve ser reescrita na seguinte forma

$$y''(x) + \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}y'(x) + \frac{\lambda_n}{\sigma(x)}y(x) = 0,$$

com $\lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$, isto é, as funções $P(x,t)$ e $Q(x,t)$ definidas no Teorema de Stieltjes, serão consideradas como sendo $P(x,t) = \dfrac{\tau(x)}{\sigma(x)}$ e $Q(x,t) = \dfrac{\lambda_n}{\sigma(x)}$.

Observe que não existe nenhuma condição imposta sobre a função $Q(x,t)$, apenas para a função $P(x,t)$. Daí, para os polinômios de Jacobi temos que

$$\begin{aligned}
P(x,\alpha,\beta) = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} &= \frac{\beta-\alpha-\beta x-\alpha x-2x}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{(\beta+1)(1-x)-(\alpha+1)(1+x)}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{\beta+1}{1+x} - \frac{\alpha+1}{1-x} = \frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Observe que $P(x,\alpha,\beta)$ é uma função decrescente de x em $(-1,1)$, já que,

$$\frac{\partial P(x,\alpha,\beta)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}\right) = -\left(\frac{\beta+1}{(1+x)^2} + \frac{\alpha+1}{(x-1)^2}\right) < 0,$$

pois $\alpha+1>0$ e $\beta+1>0$. Note também que $P(x,\alpha,\beta)$ é uma função diferenciável e decrescente de α. De fato, como $x<1$, então

$$\frac{\partial P(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} < 0.$$

Por outro lado, $P(x, \alpha, \beta)$ é uma função diferenciável e crescente de β pois como $x > -1$, então

$$\frac{\partial P(x,\alpha,\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x+1} > 0.$$

Denotando os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, organizados em ordem decrescente, por $x_{n,1}(\alpha,\beta), ..., x_{n,n}(\alpha,\beta)$, concluímos pelo Teorema de Stieltjes que os zeros $x_{n,j}(\alpha,\beta)$, $j = 1, ..., n$, são funções decrescente de α e são funções crescentes de β, para $\alpha, \beta > -1$.

3.1 Ilustração gráfica

A Figura 1 apresenta os polinômios de Jacobi de grau 4 para os valores de $\beta = 3, 5, 7, 9$ e $\alpha = 2$.

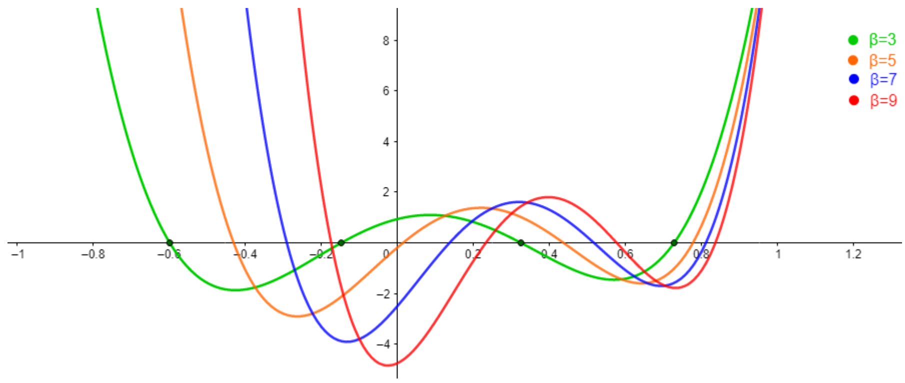

Figura 1: Polinômios $P_n^{2,\beta}(x)$, com $\beta = 3, 5, 7, 9$.

A Figura 2 ilustra o comportamento dos zeros de $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, crescente com relação a β, com $\alpha = 2$.

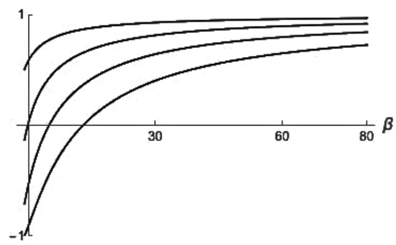

Figura 2: Monotonicidade dos zeros dos polinômios $P_4^{2,\beta}(x)$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0361

4 Conclusões e considerações finais

Nos assuntos abordados neste trabalho, vimos que os polinômios ortogonais clássicos também podem ser apresentados através da teoria de Equações Hipergeométrica. Vimos que as soluções particulares destas equações e suas derivadas satisfazem uma relação de ortogonalidade que são obtidas através das Equações de Pearson e da Fórmula de Rodrigues. Esta abordagem não é muito utilizada na apresentação dos polinômios ortogonais clássicos.

Utilizando as propriedades das equações hipergeométricas conseguimos caracterizar os polinômios ortogonais de Jacobi para analisar a monotonicidade de seus zeros utilizando o Teorema Clássico de Stieltjes. Este teorema é uma ferramenta muito importante para a analise da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos, não somente os de Jacobi visto neste trabalho (Ver [2]).

O estudo da monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais é muito utilizado em aplicações tanto na Matemática como em outras Ciências Aplicadas. Nas referências a seguir pode-se encontrar exemplos das amplas aplicações desta teoria. Tais referências também podem servir de apoio para o estudo dos limitantes dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos que crescem ou decrescem com relação à algum parâmetro.

Uma vez que os zeros podem ser crescentes ou decrescentes, podemos verificar até que certo ponto esses valores crescem ou decrescem. Esta questão foi discutida em [2] e pode também ser estudada utilizando [4] e [5].

Referências

[1] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov and V. B. Uvarov. Classical Orthogonal Polynomials. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*, Springer Series in Computational Physics, chapter 1 pages 2-17, 1991.

[2] A. L. Oliveira e F. R. Rafaeli. Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes. Dissertação de Mestrado, UFU, 2017.

[3] T. J. Stieltjes. Sur les racines de l'equation $X_n = 0$, *Acta Math* 9:385-400, 1887. DOI:10.1007/BF02406744

[4] G. Szegö. Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions, *Transactions American Mathematical Society.* 39:1-17, 1936. DOI: 10.2307/1989641

[5] G. Szegö, Orthogonal Polynomials. International Standard Book Number, *Transactions American Mathematical Society*, Colloquium publications, 23, 1939. ISBN: 978-0-8218-1023-1

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0361