Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência e Unicidade de Solução para um Problema de Combustão num Meio Poroso com n Camadas

Jesus Carlos da Mota [1]
Universidade Federal de Goiás
Marcos Roberto Batista [2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Resumo.
Neste trabalho estudamos as soluções clássicas para um sistema parabólico de equações de reação-difusão-convecção, acoplado a um sistema de equações diferenciais ordinárias, com condições iniciais e de contorno num domínio limitado. O sistema acoplado modela a propagação de uma frente de combustão através de um meio poroso com n camadas paralelas, onde as variáveis dependentes são as temperaturas e as concentrações de combustível em cada camada. O modelo é uma generalização do modelo de duas camadas estudado em [6]. Usando o Método Iterativo Monótono, provamos a existência e unicidade de solução global no tempo para o caso particular, em que as concentrações de combustível em cada camada são funções conhecidas.

Palavras-chave. Combustão, Sistema de reação-difusão-convecção, Método iterativo monótono.

1 Introdução

Soluções de modelos matemáticos para problemas de combustão em meios porosos são importantes em várias aplicações, por exemplo, no estudo da viabilidade de recuperação de petróleo de poços petrolíferos que já pararam de produzir por processos naturais.

Existe uma vasta literatura sobre problemas de combustão em meios porosos. Quanto mais realístico é o modelo, maior é o número de variáveis e de parâmetros que devem ser incluídos no mesmo. Isto dificulta a análise matemática dos modelos. Em geral, os resultados são obtidos numericamente, ver por exemplo [3, 4].

Mais recentemente, alguns autores na área de Matemática Aplicada vem trabalhando com modelos de combustão em meios porosos simplificados, de tal modo que são passíveis de serem analisados com as teorias matemáticas hoje disponíveis. Como exemplos, citamos [1, 2, 5–12]. No presente trabalho, estudamos a existência e unicidade de solução global no tempo para um problema de valor inicial e de contorno associado a um sistema de reação-difusão-convecção, com n equações parabólicas não lineares, acoplado com n

[1]jesus@ufg.br
[2]marcos.batista@ifg.edu.br

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0382

equações diferenciais ordinárias. O problema modela a propagação de uma frente de combustão através de um meio poroso constituído por n camadas paralelas com propriedades físicas distintas, como porosidades, capacidades térmicas, condutividades, etc. A reação de combustão envolve oxigênio e um sólido combustível.

Com a hipótese de que as concentrações de combustível em cada camada são funções conhecidas, usamos o Método Iterativo Monótono a partir de sub e super soluções [13–15], para provar a existência e unicidade de solução clássica para o problema.

2 O Modelo

Num meio poroso unidimensional $[0, \ell]$ são consideradas n camadas paralelas. Cada camada possui uma concentração de combustível inicial. Denotamos por $x \in [0, \ell]$ a variável espacial e por $t > 0$ a variável temporal.

As variáveis dependentes de (x, t) são a temperatura $u_i(x, t)$ e a concentração de combustível $y_i(x, t)$, definidas em cada camada i, $i = 1, \ldots, n$.
O domínio das funções u_i e y_i é denotado por $\Omega_T = [0, \ell] \times [0, T]$, com $T > 0$. A temperatura do meio externo é denotada por u_E.

O sistema é formado por n equações parabólicas não lineares acopladas com n equações diferenciais ordinárias, e é deduzido a partir das leis de conservação de massa e de energia, da Lei de Darcy, e de uma versão da Lei de Arrhenius que descreve a taxa de consumo de combustível na reação química de combustão.

Nestas condições e após algumas simplificações [6], sistema é dado por

$$\left\{ \begin{array}{c} ((a_1 + b_1 y_1)u_1)_t + c_1(u_1)_x = d_1 y_1 g(u_1) + q_1(u_2 - u_1) + \lambda_1(u_1)_{xx} - \overline{q_1}(u_1 - u_E), \\ ((a_i + b_i y_i)u_i)_t + c_i(u_i)_x = d_i y_i g(u_i) - q_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + q_i(u_{i+1} - u_i) \\ +\lambda_i(u_i)_{xx} \ \text{ se } \ 2 \leq i \leq n-1, \\ ((a_n + b_n y_n)u_n)_t + c_n(u_n)_x = d_n y_n g(u_n) - q_{n-1}(u_n - u_{n-1}) + \lambda_n(u_n)_{xx} \\ -\overline{q_2}(u_n - u_E), \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), \ \ i = 1, \ldots, n, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $t > 0$, $0 < x < \ell$ e $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, \lambda_i, q_i$, $i = 1, \ldots, n$, são constantes positivas que dependem de propriedades físicas do modelo. A função g está relacionada com a função de reação e é dada por

$$g(u) = \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{E}{u}}, \ \text{ se } \ u > 0, \\ \ \ 0, \ \text{ se } \ u \leq 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

onde E é uma constante positiva.

Dentre as constantes que aparecem no modelo, destacamos a constante q_i, que denota o coeficiente de transferência de calor entre duas camadas vizinhas. Note que se $q_i = 0$, o sistema seria desacoplado nas variáveis $u_1, \ldots, u_n$.

Supondo as concentrações de combustível conhecidas, podemos reescrever o sistema (1) da seguinte forma

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0382

$$\begin{cases} (u_1)_t - \frac{\lambda_1}{a_1+b_1y_1}(u_1)_{xx} + \frac{c_1}{a_1+b_1y_1}(u_1)_x = f_1(.,\ u), \\ (u_i)_t - \frac{\lambda_i}{a_i+b_iy_i}(u_i)_{xx} + \frac{c_i}{a_i+b_iy_i}(u_i)_x = f_i(.,\ u),\ \ 2 \le i \le n-1, \\ (u_n)_t - \frac{\lambda_n}{a_n+b_ny_n}(u_n)_{xx} + \frac{c_n}{a_n+b_ny_n}(u_n)_x = f_n(.,\ u), \end{cases} \tag{3}$$

sendo

$$\begin{aligned} f_1(.,\ u) &= \frac{(b_1A_1u_1+d_1)y_1g(u_1)}{a_1+b_1y_1} + \frac{q_1}{a_1+b_1y_1}(u_2-u_1) - \frac{\overline{q_1}}{a_1+b_1y_1}(u_1-u_E), \\ f_i(.,\ u) &= \frac{(b_iA_iu_i+d_i)y_ig(u_i)}{a_i+b_iy_i} - \frac{q_{i-1}}{a_i+b_iy_i}(u_i-u_{i-1}) \\ &\quad + \frac{q_i}{a_i+b_iy_i}(u_{i+1}-u_i),\ \ 2 \le i \le n-1 \ \text{ e} \\ f_n(.,\ u) &= \frac{(b_nA_nu_n+d_n)y_ng(u_n)}{a_n+b_ny_n} - \frac{q_{n-1}}{a_n+b_ny_n}(u_n-u_{n-1}) \\ &\quad - \frac{\overline{q_2}}{a_n+b_ny_n}(u_n-u_E), \end{aligned}$$

onde " . " significa a dependência explícita em (x,t) e $u = (u_1,\ldots,u_n)$. A dependência em (x,t) é porque $y_i = y_i(x,t)$.

Defina

$$L_iu_i = \frac{\lambda_i}{a_i+b_iy_i}(u_i)_{xx} - \frac{c_i}{a_i+b_iy_i}(u_i)_x.$$

Como $\frac{\lambda_i}{a_i+b_iy_i} > 0$, temos que $(u_i)_t - L_iu_i$ é um operador parabólico em Ω_T.

O objetivo deste trabalho é estudar as soluções clássicas para o seguinte problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_iu_i = f_i(.,\ u),\ \ \text{em}\ \ (0,\ell)\times(0,T], \\ (u_i(x,0), y_i(x,0) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x))\ \ x \in [0,\ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ \ \ \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0,\ \ t \in [0,T], \end{cases} \tag{4}$$

onde $u_{i,0}$ são funções não-negativas e limitadas em $[0,\ell]$, $i = 1,\ldots,n$ e

$$f_i(.,\ u) = \begin{cases} \frac{(b_1A_1u_1+d_1)y_1g(u_1)}{a_1+b_1y_1} + \frac{q_1}{a_1+b_1y_1}(u_2-u_1) - \frac{\overline{q_1}}{a_1+b_1y_1}(u_1-u_E),\ \ \text{se}\ \ i=1, \\ \frac{(b_iA_iu_i+d_i)y_ig(u_i)}{a_i+b_iy_i} - \frac{q_{i-1}}{a_i+b_iy_i}(u_i-u_{i-1}) + \frac{q_i}{a_i+b_iy_i}(u_{i+1}-u_i),\ 2 \le i \le n-1, \\ \frac{(b_nA_nu_n+d_n)y_ng(u_n)}{a_n+b_ny_n} - \frac{q_{n-1}}{a_n+b_ny_n}(u_n-u_{n-1}) - \frac{\overline{q_2}}{a_n+b_ny_n}(u_n-u_E),\ \ \text{se}\ \ i=n. \end{cases}$$

3 Principais resultados

Proposição 3.1. *Seja $T > 0$. Assuma que a_i, b_i e A_i são números estritamente positivos, $i = 1,\ldots,n$, e $u_{i,0}$ são funções limitadas não negativas definidas em $[0,\ell]$.*
Sejam $\widehat{U}(x,t) = (0,\ldots,0)$ e $\widetilde{U}(x,t) = (\varphi(t),\ldots,\varphi(t))$, onde

$$\varphi(t) = (\sum_{i=1}^{n} \|u_{i,0}\|_\infty + \beta)e^{\alpha t} - \beta,$$

com

$$\alpha = \max\left\{\frac{A_1 b_1}{a_1}, \ldots, \frac{A_n b_n}{a_n}\right\} \; e \; \beta = \max\left\{\frac{d_1}{A_1 b_1}, \ldots, \frac{d_n}{A_n b_n}\right\}.$$

Então $\widehat{U}$ *é uma subsolução e* $\widetilde{U}$ *é uma supersolução do problema* (4)*, em* $[0,\ell] \times [0,T]$.

Como $\widetilde{U} \geq \widehat{U}$ (coordenada a coordenada), temos que elas estão ordenadas. Podemos definir o setor

$$< \widehat{U}, \widetilde{U} >= \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in (C^0(\Omega_T)^n) : 0 \leq u_i \leq \varphi(t)\}.$$

Proposição 3.2. *Se* a_i*,* $b_i > 0$ *e* y_i *são constantes estritamente positivas, então a função de reação* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *do sistema* (4) *é quase-monótona não decrescente em* $< \widehat{U}, \widetilde{U} >$.

Proposição 3.3. *Assuma que* $a_1, \ldots, a_n$ *e* b_i *são constantes estritamente positivas e* $y_1, \ldots, y_n$ *são funções limitadas não negativas. Então,*

$$\begin{aligned}
|f_1(u) - f_1(v)| &\leq a_1^{-1}(\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \overline{q_1})|u_1 - v_1| \\
&\quad + a_1^{-1} q_1 |u_2 - v_2| + a_1^{-1}\overline{q_1}|u_E - v_E|, \\
|f_i(u) - f_i(v)| &\leq a_i^{-1}(\|y_i\|_\infty K_i + q_i + q_{i-1})|u_i - v_i| \\
&\quad + a_i^{-1} q_{i-1}|u_{i-1} - v_{i-1}| \\
&\quad + a_i^{-1} q_i |u_{i+1} - v_{i+1}|, \;\; 2 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|f_n(u) - f_n(v)| &\leq a_n^{-1}(\|y_n\|_\infty K_n + q_{n-1} + \overline{q_2})|u_n - v_n| \\
&\quad + a_n^{-1} q_{n-1}|u_{n-1} - v_{n-1}| + a_n^{-1}\overline{q_2}|u_E - v_E|,
\end{aligned}$$

onde $K_n = A_n b_n + (A_n b_n |v_n| + d_n)\frac{4e^{-2}}{E}$*,* $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \; < \widehat{U}, \widetilde{U} >$.

Seja

$$K = \max\left\{\begin{array}{c} a_1^{-1}(\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \overline{q_1}), a_1^{-1} q_1, a_1^{-1}\overline{q_1}, \\ \vdots \\ a_n^{-1}(\|y_n\|_\infty K_n + q_{n-1} + \overline{q_2}), a_n^{-1} q_{n-1}, a_n^{-1}\overline{q_2} \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Defina

$$F_i(x, t, u_1, \ldots, u_n) = K u_i + f_i(x, t, u_1, \ldots, u_n).$$

Neste caso, dada uma iteração inicial $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)})$, a sequência $\{u^{(k)}\} = \{(u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)})\}$, definida pelo processo iterativo,

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{L}_i u_i^{(k)} = F_i(u_1^{(k-1)}, \ldots, u_{n-1}^{(k-1)}, u_n^{(k-1)}) \\ u_i^{(k)}(x,0) = u_{i,0}(x) \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}|_{x=\ell} = 0\,, \end{array}\right. \tag{6}$$

está bem definida. Note que (6) é um problema linear para cada k.

Fixado um par ordenado de sub e supersolução $(\widehat{u}, \widetilde{u})$, sejam $\{\underline{u}^{(k)}\}$ e $\{\overline{u}^{(k)}\}$ sequências de sub e supersoluções com $\overline{u}^{(0)} = \widetilde{u}$ e $\underline{u}^{(0)} = \widehat{u}$, definidas pelo processo iterativo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i\overline{u}_i^{(k)} = F_i(\overline{u}_1^{(k-1)}, \ldots, \overline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \overline{u}_n^{(k-1)}) \\ \mathcal{L}_i\underline{u}_i^{(k)} = F_i(\underline{u}_1^{(k-1)}, \ldots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}) \\ \overline{u}_i^{(k)}(x,0) = \underline{u}_i^{(k)}(x,0) = u_{i,0}(x) \\ \overline{u}_i^{(0)} = \widetilde{u}_i; \quad \underline{u}_i^{(0)} = \widehat{u}_i \\ \frac{\partial \overline{u_i}^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \underline{u_i}^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \overline{u_i}^{(k)}}{\partial x}|_{x=\ell} = \frac{\partial \underline{u_i}^{(k)}}{\partial x}|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Então pode-se mostrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Os limites $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ e $\underline{u} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$, dados por*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{u}^{(k)}(x,t) = \overline{u}(x,t),$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{u}^{(k)}(x,t) = \underline{u}(x,t),$$

satisfazem a relação

$$\widehat{u}(x,t) \leq \underline{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t) \leq \widetilde{u}(x,t), \ \ (x,t) \in \overline{\Omega}_T,$$

e são soluções de (4).

Finalmente, usando o Teorema 3.1, obtem-se o resultado principal deste trabalho resumido no seguinte teorema:

Theorem 3.1. *Sejam $\widetilde{U}$ e $\widehat{U}$ o par acoplado de soluções superiores e inferiores do problema* (4)*. Então o problema* (4) *tem uma única solução clássica $u = (u_1, \ldots, u_n)$ em $< \widehat{U}, \widetilde{U} >$. Além disso, as sequências $\{\overline{u}^{(k)}\} = \{\overline{u_1}^{(k)}, \ldots, \overline{u_n}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\} = \{\underline{u_1}^{(k)}, \ldots, \underline{u_n}^{(k)}\}$ dadas por* (7)*, convergem monotonicamente para u e satisfazem a relação*

$$\widehat{u}_i \leq \underline{u}_i^{(k)} \leq \underline{u}_i^{(k+1)} \leq u_i \leq \overline{u}_i^{(k+1)} \leq \overline{u}_i^{(k)} \leq \widetilde{u}_i \ \ \text{em} \ \overline{\Omega}_T.$$

4 Conclusões

Neste trabalho, provamos a existência e unicidade de solução para o problema de combustão num meio poroso com n camadas, para o caso particular onde as concentrações de combustível são funções conhecidas. Infelizmente, o método monótono de sub e supersoluções não se aplica diretamente para resolver o problema completo, onde as concentraões de combustível também são incógnitas, pois, as equações para as concentrações y_i não são do tipo reação-difusão. No entanto, acreditamos por investigações preliminares, que é possível usar a solução obtida neste trabalho para rosolver o problema completo.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0382

Agradecimentos

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] I, Brailovsky, V. Goldshtein, I. Shreiber and G. Sivashinsky. On combustion waves driven by diffusion of pressure. *Combustion Science and Technology*, 124: 145 - 165, 1997.

[2] G. Chapiro, D. Marchesin and S. Schecter. Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 11: 95 - 328, 2014.

[3] K. H. Coats. In-situ combustion model. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 20: 533 - 554, 1980.

[4] R. B. Crookston, W. E. Culham and W. H. Chen. A numerical simulation model for thermal recovery processes. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 19: 37 - 58, 2013.

[5] J. C. da Mota, W. Dantas and D. Marchesin. Combustion fronts in porous media. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 62: 2175 - 2198, 2002.

[6] J. C. da Mota and S. Schecter. Combustion fronts in a porous medium with two layers. *Journal of Dynamics and Differential Equations,* 18: 615 - 665, 2006.

[7] J. C. da Mota and M. M. Santos. An application of the monotone iterative method to a combustion problem in porous media. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 12: 1192 - 1201, 2011.

[8] J. C. da Mota, M. M. Santos and R. A. Santos. The cauchy problem for a combustion model in a porous medium with two layers. *Monatschefte für Mathematik*, 184, 2017.

[9] J. C. da Mota and A. J. Souza. Multiple traveling waves for dry forward combustion through a porous medium. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 78: 1056 - 1077, 2018.

[10] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type,* 3*a. edição*. Dover Publications, New York, 2015.

[11] A. Ghazaryan, S. Schecter and P. L. Simon. Gasless combustion fronts with heat loss. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 73: 1303 - 1326, 2013.

[12] P. V. Gordon. Recent mathematical results on combustion in hydraulically resistant porous media. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2: 56 - 76, 2007.

[13] O. A. Oleinik and S. N. Kruzhkov. Quasilinear second order parabolic equations with many independent variable. *Russian Mathematical Surveys*, 16: 105 - 146, 1961.

[14] C. V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, 1a. edição*. Springer US, New York, 1992.

[15] F. Rothe. *Global solutions of reaction-diffusion systems. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.

