Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Pares de Funções de Galois: uma adjunção advinda de espaços quase topológicos[1]

Cristiane Alexandra Lázaro[2]
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Hércules de Araujo Feitosa[3]
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Marcelo Reicher Soares[4]
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Resumo. Apresentamos conceitos algébricos básicos e fundamentais para o desenvolvimento teórico dos pares de Galois e, então, apresentamos um par de Galois (f, g), em que f e g são definidas entre conjuntos parcialmente ordenados (posets), $\mathcal{A}_1 = (\Omega_1, \subseteq)$ e $\mathcal{A}_2 = (\Omega_2, \subseteq)$, que podem ser definidas utilizando uma aplicação contínua $s : (E_1, \Omega_1) \to (E_2, \Omega_2)$, em que (E_1, Ω_1) e (E_2, Ω_2) são espaços quase topológicos.

Palavras-chave. Espaços Quase Topológicos, Pares de Galois, Adjunções, Conexões de Galois.

1 Introdução

Consideremos que K é um corpo e L é uma extensão de K de dimensão finita. Por $\mathfrak{I}(K, L)$, indicamos o conjuntos de todos os corpos intermediários entre K e L, ordenados pela inclusão $K \subseteq L$. Agora, consideremos que $Gal(K, L)$ é o grupo de todos os automorfismos de L que fixam o corpo K, o grupo de Galois. Seja $\mathfrak{S}(Gal(K, L))$ o conjunto de todos os subgrupos de $Gal(K, L)$, que são subgrupos normais, ordenados pela inclusão $\subseteq$. A Teoria de Galois mostra que a cada corpo F de $\mathfrak{I}(K, L)$ está associado um único grupo de $\mathfrak{S}(Gal(K, L))$ e que a cada grupo de $\mathfrak{S}(Gal(K, L))$ está associado um único corpo de $\mathfrak{I}(K, L)$. Cada par (f, g) destas funções, com sentidos invertidos, é chamado de conexão de Galois.

Contudo, os pares de Galois configuram uma generalização destas funções e têm sido investigados no contexto das estruturas de ordem. Como o conceito de ordem é usual e permeia toda a Matemática, então os pares de Galois podem ser aplicados em variados e distintos tópicos de Matemática.

[1]versão 1.2.
[2]cristiane.lazaro@unesp.br
[3]hercules.feitosa@unesp.br
[4]reicher.soares@unesp.br

Assim, apresentamos algumas noções algébricas essenciais para o desenvolvimento teórico das noções sobre pares de Galois.

Na sequência, apresentamos as definições de pares de Galois e fazemos algumas comparações entre os conceitos definidos. Para justificarmos importantes propriedades dos pares de Galois, tomamos um par, as adjunções, e para elas demonstramos várias propriedades, as quais podem ser verificadas para os outros pares de Galois.

Por fim, introduzimos um exemplo de adjunção, que é um particular par de Galois, obtido através de uma função contínua entre espaços quase topológicos.

Estes espaços são contraparte de caráter topológico para sistemas formais, os quais compõem um tópico bastante relevante para a área de Matemática Computacional. Função contínua entre tais espaços pode ser entendida como uma tradução de um sistema formal em outro preservando os aspectos essenciais dos sistemas formais, isto é, a manutenção da validade de suas regras. Associamos o conceito de espaço quase topológico com sistema formal, dedução com ordem e função contínua com tradução.

Nestas notas, destacamos um caso de função contínua que se caracteriza com uma adjunção, um particular par de Galois.

2 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição 2.1. *Uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto A é uma ordem parcial se é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, valem respectivamente:*
(i) *para todo $a \in A$, $a \leq a$;*
(ii) *para todos $a, b \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;*
(iii) *para todos $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.*

Definição 2.2. *Um conjunto parcialmente ordenado (poset) é um par $(A, \leq)$, em que A é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma ordem parcial sobre A.*

Definição 2.3. *Se $f : (A, \leq_A) \to (P, \leq_P)$ é uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados, então:*
(i) *a função f preserva as ordens se, $a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_P f(b)$;*
(ii) *a função f inverte as ordens se, $a \leq_A b \Rightarrow f(b) \leq_P f(a)$.*

No contexto da análise, usualmente estas funções são chamadas de crescente e decrescente, respectivamente.

Definição 2.4. *Se $f : (A, \leq_A) \to (A, \leq_A)$, então:*
(i) *a função f é idempotente se $f \circ f = f$;*
(ii) *a função f é extensiva ou inflacionária se, para todo $a \in A$, $a \leq f(a)$;*
(iii) *a função f é deflacionária se, para todo $a \in A$, $f(a) \leq a$.*

Uma relação de ordem parcial é, muitas vezes, chamada apenas de relação de ordem.

Exemplos:
(a) A relação "x é menor ou igual a y" no conjunto dos números reais, denotada por $x \leq y$, é uma ordem.

(b) Dado um conjunto E, se consideramos o conjunto $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de E, então a relação "A é subconjunto de B" é uma relação de ordem em $\mathcal{P}(E)$. Assim, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um poset.

3 Espaços Quase Topológicos

Apresentamos os espaços quase topológicos, damos alguns exemplos e destacamos a motivação que originou o conceito.

Veremos uma conexão próxima entre conceitos de caráter topológicos e outros de motivação lógica.

Definição 3.1. *Um espaço quase topológico é um par* (E, Ω) *em que* E *é um conjunto não vazio e o conjunto* $\Omega \subseteq \mathcal{P}(E)$ *satisfaz a seguinte condição:* $A \subseteq \Omega \Rightarrow \cup\{A_i : A_i \in A\} \in \Omega$.

Definição 3.2. *A coleção* Ω *de subconjuntos de* E *é denominada quase topologia e cada membro de* Ω *é um conjunto aberto de* (E, Ω).

A condição que define uma quase topologia diz que uma união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto de (E, Ω).

Esta condição também vale para os espaços topológicos, porém acrescida de outras condições. Por isso, cada espaço topológico é um espaço quase topológico e, nesse sentido, temos uma generalização do conceito de espaço topológico.

Definição 3.3. *Um conjunto* $F \subseteq E$ *é fechado em* (E, Ω) *quando o seu complemento relativo a* E*, que é denotado por* F^C*, é aberto em* (E, Ω).

Proposição 3.1. *O conjunto* $\emptyset$ *é aberto em todo espaço quase topológico* (E, Ω).

Demonstração: *Basta observarmos que* $\emptyset \subseteq \Omega$ *e, assim,* $\cup\emptyset = \emptyset \in \Omega$.

Corolário 3.1. *O domínio* E *é fechado em todo espaço quase topológico* (E, Ω).

Proposição 3.2. *Toda intersecção de conjuntos fechados de* (E, Ω) *é conjunto fechado de* (E, Ω).

Definição 3.4. *Se* $A \subseteq E$*, então o interior de* A *em* (E, Ω) *é o conjunto:*

$$\mathring{A} =_{df} \cup\{X \subseteq E : X \subseteq A \text{ e } X \in \Omega\}.$$

O fecho de A *em* (E, Ω) *é o conjunto:*

$$\overline{A} =_{df} \cap\{X : A \subseteq X \text{ e } X^C \in \Omega\}.$$

Proposição 3.3. *Se* $A \subseteq E$*, então* $\overline{A}$ *é fechado e* $\mathring{A}$ *é aberto em* (E, Ω).

Proposição 3.4. *Se* (E, Ω) *é um espaço quase topológico, então para todos* $A, B \subseteq E$*:*

(i) $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$;

(ii) $\mathring{A} \subseteq \mathring{\mathring{A}}$;

(iii) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$;

(iv) $\overline{E} \subseteq E$;

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$;

(vi) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Uma outra noção fundamental no estudo dos espaços topológicos é a de função contínua. Teremos aqui uma definição correspondente.

Para sermos rigorosos, para espaços quase topológicos, seria interessante termos um nome específico para a noção de continuidade aqui contextualizada, que poderia ser "funções quase contínuas" por exemplo. Mas, para facilitar a notação e deixar o texto "menos carregado" utilizaremos simplesmente o nome de funções contínuas.

Definição 3.5. *Dados os espaços quase topológicos* (E_1, Ω_1) *e* (E_2, Ω_2), *então uma função* $f : (E_1, \Omega_1) \longrightarrow (E_2, \Omega_2)$ *é continua se, para todo elemento* $B \in \Omega_2$ *tem-se que* $f^{-1}(B) \in \Omega_1$.

A noção de continuidade será importante na identificação de pares de Galois em espaços quase topológicos.

4 Pares de Galois

Conexão de Galois é um par de funções definidas entre duas estruturas de ordem, com sentidos inversos, motivadas pelas funções da Teoria de Galois. O entendimento das conexões originais permitiram a ampliação do contexto de modo a caminharmos para os pares de Galois.

Quando olhamos para a definição de conexão de Galois, podemos fazer quatro permutações simples, o que nos gera outros pares de funções, que mantêm alguma semelhança com a definição de conexão.

Apresentamos cada uma destas variações que dão origem a distintos pares de funções, as quais chamamos no coletivo de pares de Galois.

Definição 4.1. *Se* $(A, \leq_A)$ *e* $(P, \leq_P)$ *são conjuntos parcialmente ordenados,* $a \in A$ *e* $p \in P$ *são elementos quaisquer e* $f : A \to P$ *e* $g : P \to A$ *são funções, então:*

(i) *o par* (f, g) *é uma conexão de Galois se:* $a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a)$;

(ii) *o par* $(f, g)^d$ *é uma conexão dual de Galois se:* $g(p) \leq_A a \iff f(a) \leq_P p$;

(iii) *o par* $[f, g]$ *é uma adjunção se:* $a \leq_A g(p) \iff f(a) \leq_P p$;

(iv) *o par* $[f, g]^d$ *é uma adjunção dual se:* $g(p) \leq_A a \iff p \leq_P f(a)$.

O nome adjunção vem da teria das categorias. Em muitos textos sobre o tema, o par $[f, g]$ também é chamado de residuado.

Se $(A, \leq_A)$ é um conjunto parcialmente ordenado, então denotaremos a ordem inversa de $\leq_A$ por $\leq_A^{op}$ e, desse modo, $(A, \leq_A^{op}) = (A, (\leq_A)^{-1})$. Assim, $a \leq_A b \Leftrightarrow b \leq_A^{op} a$.

Desta definição decorre o seguinte.

Sejam $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq_P)$ conjuntos parcialmente ordenados e $f : A \to P$ e $g : P \to A$ funções:

(i) Se (f, g) é uma conexão de Galois, então (g, f) também é uma conexão de Galois.

(ii) Se $(f, g)^d$ é uma conexão dual de Galois, então $(g, f)^d$ também é uma conexão dual de Galois.

(iii) Se $[f, g]$ é uma adjunção, então $[g, f]^d$ é uma adjunção dual.

(iv) Se $[f,g]^d$ é uma adjunção dual, então $[g,f]$ é uma adjunção.

Se (f,g) é uma conexão de Galois para $(A,\leq_A)$ e $(P,\leq_P)$, então:
(i) $(f,g)^d$ é uma conexão dual de Galois para $(A,\leq_A^{op})$ e $(P,\leq_P^{op})$.
(ii) $[f,g]$ é uma adjunção para $(A,\leq_A)$ e $(P,\leq_P^{op})$.
(iii) $[f,g]^d$ é uma adjunção dual para $(A,\leq_A^{op})$ e $(P,\leq_P)$.

A seguir, destacamos as adjunções como um caso de par de Galois. Demonstramos alguns resultados sobre as adjunções. Com as devidas particularidades, resultados semelhantes são aplicados aos demais pares de Galois.

A proposição seguinte nos dá condições para termos uma adjunção.

Proposição 4.1. *Sejam $(A,\leq_A)$ e $(P,\leq_P)$ duas ordens parciais, $f: A \to P$ e $g: P \to A$ funções, $a,b \in A$ e $p,q \in P$. Então o par (f,g) é uma adjunção se, e somente se, valem as condições:*
(i) $a \leq g(f(a))$
(ii) $f(g(p)) \leq p$
(iii) $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
(iv) $p \leq q \Rightarrow g(p) \leq g(q)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ *(i) Como $f(a) \leq f(a)$ e $[f,g]$ é uma adjunção, então $f(a) \leq f(a) \Leftrightarrow a \leq g(f(a))$. Logo, $a \leq g(f(a))$.*

(ii) Como $g(p) \leq g(p)$ e $[f,g]$ é uma adjunção, então $g(p) \leq g(p) \Leftrightarrow f(g(p)) \leq p$. Logo, $f(g(p)) \leq p$.

(iii) Seja $a \leq b$. Por (i), $b \leq g(f(b))$ e, então, $a \leq g(f(b))$. Desde que $[f,g]$ é uma adjunção, então $a \leq g(f(b)) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$. Logo, $f(a) \leq f(b)$

(iv) Seja $p \leq q$. Por (ii), $f(g(p)) \leq p$ e, então, $f(g(p)) \leq q$. Desde que $[f,g]$ é uma adjunção, então $f(g(p)) \leq q \Leftrightarrow g(p) \leq g(q)$. Logo, $g(p) \leq g(q)$.

$(\Leftarrow)$ *Ida: $a \leq g(p) \Rightarrow f(a) \leq f(g(p)) \Rightarrow f(a) \leq p$; Volta: $f(a) \leq p \Rightarrow g(f(a)) \leq g(p) \Rightarrow a \leq g(p)$.*

Temos então outra maneira de definirmos uma adjunção. O par $[f,g]$ é uma adjunção se as funções f e g preservam as ordens e as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são, respectivamente, inflacionária e deflacionária.

Exemplo

Dados dois conjuntos E e F, seja R uma relação de E em F, isto é, $R \subseteq E \times F$ e consideremos então as seguintes relações de ordem $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ e $(\mathcal{P}(F),\subseteq)$.

Agora, definamos as seguintes funções: $f: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ dada por $A^f = \{y \in F : (\exists x \in A)(xRy)\}$; e $g: \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ dada por $B^g = \{x \in E : (\forall y)(xRy \to y \in B)\}$.

Mostraremos que $[f,g]$ é uma adjunção. Para tanto, devemos observar que (i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^f \subseteq A_2^f$; (ii) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1^g \subseteq B_2^g$; (iii) $(B^g)^f \subseteq B$; (iv) $A \subseteq (A^f)^g$, conforme Proposição 4.1.

(i) Consideremos que $A_1 \subseteq A_2$. Se $y \in A_1^f$, então $(\exists x \in A_1)(xRy)$. Da hipótese, temos que $(\exists x \in A_2)(xRy)$ e, portanto, $y \in A_2^f$. Logo $A_1^f \subseteq A_2^f$.

(ii) Consideremos que $B_1 \subseteq B_2$. Se $x \in B_1^g$, então $(\forall y)(xRy \to y \in B_1)$. Da hipótese, temos que $(\forall y)(xRy \to y \in B_2)$ e, portanto, $x \in B_2^g$. Logo $B_1^g \subseteq B_2^g$.

(iii) Se $y \in (B^g)^f$, então existe $x \in B^g$ tal que xRy. Agora, se xRy e $x \in B^g$, então $y \in B$. Logo, $(B^g)^f \subseteq B$.

(iv) Suponhamos que $A \nsubseteq (A^f)^g$. Então existe $x \in A$ tal que $x \notin (A^f)^g$. Daí, não é o caso que $(\forall y)(xRy \to y \in A^f)$. Logo, existe y tal que xRy e $y \notin A^f$. Se $y \notin A^f$, então não é o caso que existe x tal que xRy, o que contradiz a afirmação acima.

5 Um exemplo de adjunção advindo de espaços quase topológicos

De posse de todos os conceitos que antecedem esta seção poderemos agora identificar, a partir desses elementos, um par de Galois, mais precisamente uma adjunção.

A definição de tal par é sobre espaços quase topológicos.

Consideremos inicialmente dois espaços quase topológicos (E_1, Ω_1), (E_2, Ω_2) e uma função $s : (E_1, \Omega_1) \longrightarrow (E_2, \Omega_2)$ que seja contínua e injetiva.

A partir da função contínua s e dos conjuntos parcialmente ordenados $(\Omega_1, \subseteq)$ e $(\Omega_2, \subseteq)$ definiremos, de uma maneira bastante específica e conveniente, duas novas funções, a saber, $g : (\Omega_1, \subseteq) \longrightarrow (\Omega_2, \subseteq)$ tal que, para todo $A \in \Omega_1$, tenhamos $g(A) = \overset{\circ}{\widehat{s(A)}}$ = interior de $s(A)$ e $f : (\Omega_2, \subseteq) \longrightarrow (\Omega_1, \subseteq)$ tal que, para todo $P \in \Omega_2$ tenhamos $f(P) = s^{-1}(P)$.

Teorema 5.1. *Com as considerações acima temos que o par $[f, g]$ é uma adjunção.*

Demonstração: *Mostraremos que são válidas as quatro condições apresentadas na Proposição 4.1, que caracterizam $[f, g]$ como uma adjunção (um par de Galois).*

Sejam então $A, B \in \Omega_1$ e $P, Q \in \Omega_2$ elementos arbitrários.

(i) $g(f(P)) = g(s^{-1}(P)) = \overset{\circ}{\widehat{s(s^{-1}(P))}} = \overset{\circ}{P} = P$. Logo, $P \subseteq g(f(P))$.

(ii) $f(g(A)) = s^{-1}(g(A)) = s^{-1}(\overset{\circ}{\widehat{s(A)}}) \subseteq s^{-1}(s(A)) = A$, posto que s é injetiva.

(iii) se $P \subseteq Q$, então $s^{-1}(P) \subseteq s^{-1}(Q)$ e, daí, $f(P) \subseteq f(Q)$.

(iv) se $A \subseteq B$, então $s(A) \subseteq s(B)$ e $\overset{\circ}{\widehat{s(A)}} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{s(B)}}$. Portanto, $g(A) \subseteq g(B)$.

6 Conclusões

O conceito de conexão de Galois surge dos desenvolvimentos originais de Galois, que para resolver problema de decisão sobre uma equação algébrica sobre um corpo, via uma função, conseguiu tratar do problema, com solução possível, num grupo solúvel. Outra função com sentido inverso, retornou a solução obtida no grupo mais uma vez para o corpo em que estava o problema original.

Esta é uma técnica recorrente na Matemática, usamos uma função, que pode ser denominada de redução, para transpor um problema de um ambiente em que a solução não é fácil, ou pelo menos não é conhecida, para outro em que a solução é possível e tratável. Naturalmente, precisamos retornar ao ambiente original para a solução do problema dado.

A partir do contexto inicial, algebristas generalizaram o conceito de conexão de Galois para funções entre estruturas de ordem, como apresentado nestas notas.

Neste contexto estendido e algébrico pudemos ampliar as conexões de Galois para os pares de Galois. Então, temos reconhecido muitos pares de Galois na literatura matemática. Aqui mostramos mais um.

Referências

[1] J. M. Dunn and G. M. Hardegree. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford University Press, Oxford, 2001.

[2] H. D. Ebbinghaus, J. Flum and W. Thomas. *Mathematical logic*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] H. A. Feitosa, M. C. C. Grácio and M. C. Nascimento. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. *Principia*, 14:47–70, 2010.

[4] H. A. Feitosa, C. A. Lázaro e M. C. Nascimento. Pares de Galois e espaços de Tarski, *Cognitio: Revista de Filosofia*, 19: 110–132, 2018.

[5] H. A. Feitosa and M. C. Nascimento. Logic of deduction: models of pre-order and maximal theories. *South American Journal of Logic*, 1: 283–297, 2015.

[6] H. A. Feitosa e L. Paulovich *Um prelúdio à lógica*. Editora UNESP, São Paulo, 2005.

[7] H. Herrlich and M. Husek. Galois connections categorically. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 68:165–180, 1990.

[8] C. A. Lázaro, H. A. Feitosa e M. C. Nascimento. Conexões de Galois e um exemplo vindo da lógica. *Caderno de trabalhos completos e resumos do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2017.

[9] F. Miraglia *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. In *Coleção CLE*. UNICAMP/CLE, volume 1, Campinas, 1987.

[10] O. Ore. Galois connections. *Transactions of the American Mathematical Society*, 55: 493–513, 1944.

[11] E. Orlowska and I. Rewitzky. Algebras for Galois-style connections and their discrete duality. *Fuzzy Sets and Systems*, 161: 1325-1342, 2010.

[12] P. Smith. *The Galois connection between syntax and semantics*. Technical report. Univerty of Cambridge, Cambridge, 2010.

