

Um Algoritmo Genético para a Reconstrução de Fontes Concentradas via Método das Soluções Fundamentais

Jairo Rocha de Faria¹

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, João Pessoa, PB

Resumo. Problemas inversos de reconstrução de fontes apresentam grande potencial para aplicações de interesse da engenharia, como na identificação de fontes poluidoras, e da medicina, como na eletroencefalografia, para citar dois importantes exemplos. Do ponto de vista matemático, a identificação de uma fonte concentrada (intensidade e localização) corresponde à identificação do centroide (localização) e do tamanho (intensidade) de uma fonte distribuída. Por outro lado, do ponto de vista numérico, observa-se que o uso de métodos de discretização de domínio está intrinsecamente associado à introdução de ruídos numéricos nos algoritmos de reconstrução de fontes concentradas, o que é fortemente desaconselhável, uma vez que problemas inversos são reconhecidamente mal postos. O objetivo deste trabalho é explorar numericamente, no contexto de um problema de Poisson, um novo algoritmo de reconstrução baseado no método das soluções fundamentais, onde a fonte concentrada pode ser adequadamente representada por um ponto no interior do domínio. O problema inverso é então reformulado como um problema de otimização que é resolvido através de um algoritmo genético. Finalmente, a acurácia do algoritmo proposto é ilustrada através de alguns experimentos numéricos realizados para o caso bidimensional.

Palavras-chave Problemas Inversos, Método das Soluções Fundamentais, Algoritmos Genéticos, Reconstrução de Fontes

1 Introdução

Problemas Inversos de identificação de fontes apresentam diversas aplicações de interesse da engenharia e medicina, como em ensaios não destrutivos ou na detecção de tumores, por exemplo [7, 10]. Diversos trabalhos da literatura partem de um chute inicial para a reconstrução de uma fonte representada por uma função característica. O objetivo deste trabalho é propor um algoritmo para a reconstrução do centroide e do tamanho de uma fonte distribuída, isto é, para a reconstrução de uma fonte pontual, localizada no interior do domínio e de intensidade proporcional à fonte distribuída, a partir de medições realizadas na fronteira. Mais especificamente, uma metodologia para a escolha do chute inicial (centroide e tamanho) em algoritmos de reconstrução de fontes é proposta. Em

¹jairo@ci.ufpb.br

particular, o método das soluções fundamentais (*method of fundamental solutions* - MFS) para a solução do problema direto é adotado e utiliza-se um algoritmo genético (genetic algorithm - GA) para a minimização da função custo eleita para se abordar o problema inverso como um problema de otimização.

Este artigo é organizado do seguinte modo: na seção 2 é apresentada a formulação matemática do problema, na seção seguinte (seção 3) apresenta-se o método das soluções fundamentais no contexto do problema sob análise, na seção 4 algumas ideias de inspiração para os algoritmos genéticos são exploradas. A seção 5 é destinada à apresentação dos experimentos numéricos e, finalmente, na seção 6 apresentam-se as conclusões do presente estudo.

2 Formulação do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um domínio representado por um conjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e com fronteira suave ($\partial\Omega \subset C^2$). Denota-se por $b_i(\alpha_i, \delta_{x_i})$ a fonte de intensidade α_i concentrada no ponto $x_i \in \Omega$, onde $\delta_{x_i} = \delta(x - x_i)$ representa a função delta de Dirac. Considerando-se um problema modelado pela equação de Poisson, o problema inverso sob investigação é a reconstrução de uma fonte pontual (intensidade e localização) a partir de medições realizadas na fronteira $\partial\Omega$. Em particular, tem-se o seguinte problema sobre determinado:

$$\begin{cases} -\Delta u = b^* & \text{em } \Omega \\ u = u^* & \text{em } \partial\Omega \\ -\partial_n u = q^* & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

onde $b^* = b(\alpha_i^*, \delta_{x_i^*})$. Mais especificamente, o problema inverso é a reconstrução da intensidade α_i^* e da localização da fonte x_i^* tomando-se uma condição de contorno como dado e a outra como a leitura correspondente. No presente trabalho, em particular, o dado é a condição de contorno de Dirichlet $u^*|_{\partial\Omega}$ e $q^*|_{\partial\Omega}$ é a da medida correspondente.

Como o problema inverso (1) é mal posto, adota-se a estratégia usual de reformulá-lo como um problema de otimização. Mais precisamente, considera-se a minimização da seguinte função custo:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (q^* - \partial_n u)^2 dS, \quad (2)$$

onde u satisfaz o problema (3)

$$\begin{cases} -\Delta u = b_0 & \text{em } \Omega \\ u = u^* & \text{em } \partial\Omega \end{cases}. \quad (3)$$

para um chute inicial b_0 dado por:

$$b_0 = \alpha_0 \delta(x - x_0). \quad (4)$$

Finalmente, para resolver o problema inverso, aplica-se um algoritmo genético com o objetivo de minimizar a função custo (2).

Além das vantagens dos métodos sem malha sobre os métodos de discretização de domínio, como a facilidade de implementação em qualquer dimensão e o baixo custo computacional, por exemplo, é importante ressaltar que o uso do método das soluções fundamentais no presente contexto permite uma representação adequada da fonte concentrada por um ponto fonte do MFS. Desde que este ponto seja alocado no interior do domínio, ao contrário da *práxis* da metodologia, como será esclarecido na próxima seção.

3 O Método das Soluções Fundamentais

O método das soluções fundamentais, introduzido por Kupradze and Aleksidze [9] em 1964, é um método sem malha que tem recebido grande atenção da comunidade científica nos últimos anos, sobretudo em algoritmos de reconstrução, onde a dependência com a discretização pode gerar resultados artificialmente precisos [2]. Além disso, o MFS destaca-se pela facilidade de implementação, velocidade de computação, baixa necessidade de armazenamento e convergência exponencial [1, 4, 9]. Assim, no contexto de problemas inversos, onde frequentemente utiliza-se algoritmos iterativos e o problema direto associado precisa ser resolvido muitas vezes, essas vantagens são amplificadas.

Levando-se em conta o problema (3) e a definição de solução fundamental, pode-se inferir que a identificação de uma fonte concentrada b_i é o mesmo que identificar um ponto fonte do MFS localizado em $\xi = x_i \in \Omega$ e com intensidade α_i , sendo o problema de Poisson, portanto, resolvido através da equação de Laplace, exceto nos pontos onde existirem fontes concentradas. A solução fundamental, no caso bidimensional, é dada por:

$$G(\|x - \xi\|) = -\frac{1}{2\pi} \log \|x - \xi\|, \quad (5)$$

e a solução do MFS é dada pela combinação linear

$$u(x) = \sum_{j=1}^M a_j(G(\|x - \xi^j\|)) + \alpha_0(G(\|x - x_0\|)), \quad \text{para } x \in \Omega \cup \partial\Omega, \quad (6)$$

onde ξ^j são os pontos fontes (singularidades) alocados em uma pseudo-fronteira fora do domínio Ω e x_0 é alocado no interior do domínio, para a representação da fonte pontual (veja a Fig. 1). Para a determinação dos coeficientes a_j , ou seja, para a solução do problema direto (3), basta impor a condição de contorno

$$u^*(x_l) = \sum_{j=1}^{M+1} a_j(G(\|x_l - \xi^j\|)), \quad \text{para } x_l \in \partial\Omega, \quad l = \overline{1, M}, \quad (7)$$

onde x_l são denominados pontos de colocação (para simplificar a notação, denota-se $a_{M+1} = \alpha_0$ e $\xi^{M+1} = x_0$). Neste trabalho, para a realização dos experimentos numéricos, adota-se $\Omega = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, a pseudo-fronteira foi escolhida na fronteira da bola de centro na origem e raio $R = 2$ ($\partial B_R(0)$), $M = 40$. Para se evitar o cometimento de crimes inversos, onde a utilização do mesmo esquema numérico para a

simulação dos dados sintéticos e para a solução do problema direto podem gerar, artificialmente, bons resultados [2], o esquema do MFS para o problema direto foi modificado, utilizando-se $M = 60$ e $R = 3.0$. Como o número de pontos fonte ($M + 1$) é maior do que o número de pontos de colocação (M), o sistema associado ao MFS foi resolvido pelo método dos mínimos quadrados. A figura 1 apresenta um esquema para a aplicação do MFS no problema direto.

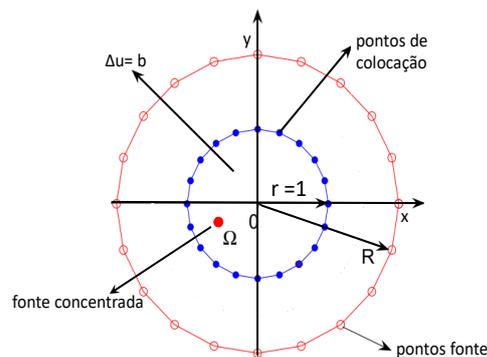


Figura 1: Esquema do MFS para a identificação de fontes concentradas.

4 Algoritmos Genéticos

Motivado pela teoria da evolução natural das espécies de Darwin [3], Holland [6] propôs um algoritmo estocástico com base em um processo de seleção natural para encontrar a solução de problemas de otimização com ou sem restrições. Partindo-se de uma população inicial, o algoritmo utiliza uma função de adaptabilidade, que depende do problema em análise, como uma medida de o quanto um membro da população é mais apto do que outro. Esta medida é então utilizada para transformar a população através de três mecanismos evolutivos: seleção, cruzamento e mutação, em um processo elitista que objetiva uma nova população com uma média de adaptabilidade maior que a da população anterior.

O uso de algoritmos genéticos associado ao método das soluções fundamentais tem relevantes aplicações na literatura de computação científica. Para citar alguns exemplos relevantes, Jopek e Kołodziej [8] aplicaram GA para a localização ótima dos pontos fontes no MFS. Por sua vez, Gorzelanczyk [5] utilizou as duas metodologias em um contexto de torção de barras com múltiplas seções transversais conectadas. Mais recentemente, Santos et al. [11] realizaram simulações numéricas de sistemas de proteção catódica combinando MFS e GA. Por outro lado, o leitor interessado em aplicações de algoritmos genéticos no contexto de problemas inversos deve consultar o livro de Silva Neto e Becceneri [12], bem como as referências bibliográficas ali encontradas.

No presente trabalho, a função custo dada pela equação (2) é utilizada com sinal negativo para a função de adaptabilidade. Assim, os indivíduos com maior adaptabilidade são aqueles para os quais a função custo está mais próxima de zero. Em particular, utilizamos o *Genetic Algorithm function* do MATLAB Optimization Toolbox com uma

população de tamanho $m = 50$, probabilidade de cruzamento $p_c = 0.5$, probabilidade de mutação $p_m = 0.01$. Os critérios de parada são dados pelo limite de 300 gerações e a função de tolerância 10^{-6} .

5 Experimentos Numéricos

Exemplo 1: Seja um ponto fonte localizado em $x^* = (-0.4, -0.14)$ com intensidade $\alpha^* = 7.1$. Os valores computados são denotados com o subscrito *comp* : ($\mathbf{x}_{comp} = (x_{comp}, y_{comp})$ e α_{comp}). Usando o MFS para resolver o problema direto e obter os dados simulados e o GA, para minimizar a função custo, obtem-se $\mathbf{x}_{comp} = (-0.4, -0.14)$ e $\alpha_{comp} = 7.1$. Após 5 interações o valor da função custo atinge $\mathcal{F} = 4.9 \times 10^{-6}$. Este resultado é mostrado na Fig. (2), onde o centro do círculo representa a posição e o raio é proporcional à intensidade α da fonte reconstruída.

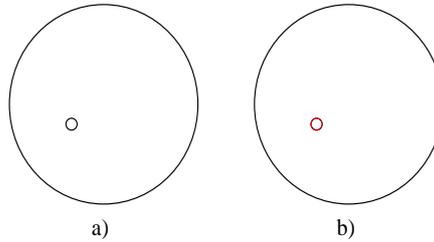


Figura 2: Exemplo 1: a) objetivo: b^* b) fonte reconstruída

No próximo exemplo, foi acrescentado ruído gaussiano branco (WGN) no fluxo calculado, levando-se em consideração a reconstrução dos mesmos dados sintéticos do exemplo anterior. Os resultados são apresentados na Tabela (1) levando-se em conta 1%, 2% e 5% WGN. Estes resultados também são apresentados na Fig.(3).

Exemplo 2: Os seguintes resultados foram obtidos:

Tabela 1: Exemplo 2 para $x^* = (-0.4, -0.14)$ e $\alpha^* = 7.1$.

WGN	x_{comp}	y_{comp}	α_{comp}	iterações	\mathcal{F}
1%	-0.392	-0.154	7.120	5	0.0489
2%	-0.39	-0.153	7.160	5	0.0820
5%	-0.406	-0.136	7.111	5	0.157

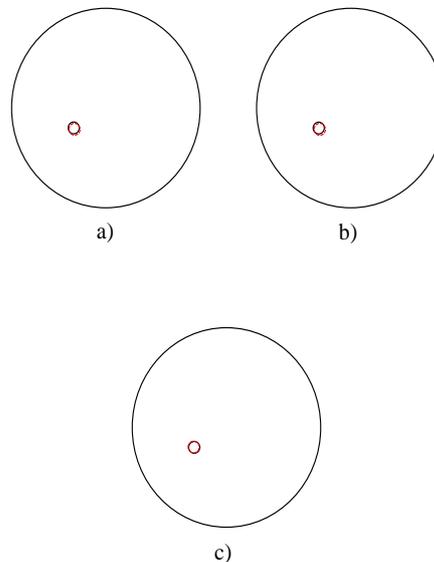


Figura 3: Exemplo 2: Resultados obtidos com dados ruidosos com (a) 1%, (b) 2% e (c) 5% de WGN.

Observando-se os resultados obtidos, mesmo para dados poluídos com 5% de ruído gaussiano branco, foi possível a reconstrução, com excelente acurácia, da posição e intensidade de uma fonte concentrada após cerca de 250 avaliações da função custo, isto é, após 5 gerações do algoritmo genético.

6 Conclusões

O foco do presente trabalho foi a reconstrução de uma fonte concentrada em um problema de Poisson aplicando-se o método das soluções fundamentais na solução do problema direto e um algoritmo genético para a minimização da função custo que associa o problema inverso a um problema de otimização. Deve-se ressaltar que a identificação de uma singularidade no interior do domínio constitui uma dificuldade adicional para a solução numérica do problema. De fato, o problema Motz, que apresenta uma singularidade na fronteira é um *benchmark* para métodos de elementos de contorno e para o MFS [8].

Neste trabalho, foi proposta uma modificação no MFS clássico e considerou-se um ponto fonte no interior do domínio, o que permitiu a adequada representação da fonte concentrada. A utilização do “*Genetic Algorithm function*”, do MATLAB Optimization Toolbox conduziu a resultados bastante acurados para a reconstrução de uma única fonte, mesmo quando foram consideradas leituras poluídas com ruídos.

Trabalhos futuros abordarão a identificação de várias fontes pontuais com leitura parcial dos dados, considerando equações do tipo Helmholtz em duas e três dimensões, além

da identificação da forma e posição de uma fonte distribuída utilizando o algoritmo ora proposto para a escolha do chute inicial em composição com um algoritmo de análise de sensibilidade à mudança de forma.

Referências

- [1] C.S. Chen, A. Karageorghis, Y.S. Smyrlis, The Method of Fundamental Solutions: A Meshless Method. *Dynamic Publishers*, Atlanta, 2008.
- [2] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, Berlin, 1992.
- [3] C. Darwin, “*On the origin of Species by Means of Natural Selection*”, John Murray, Londres, 1859.
- [4] G. Fairweather, A. Karageorghis, The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comput. Math.* 9(1-2), 69-95, 1998.
- [5] P. Gorzelanczyk, Method of fundamental solution and generic algorithms for torsion of bars with multiply connected cross sections. *J. Theor. Appl. Mech.* 49, 1059-1078, 2011.
- [6] J. H. Holland, “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*”, *University of Michigan Press*, Ann Arbor, MI, 1975.
- [7] V. Isakov, *Inverse Source Problems*. Mathematical Surveys and Monographs Number 34, American Mathematical Society, 1990.
- [8] H. Jopek, J.A. Kołodziej, Application of genetic algorithms for optimal positions of source points in method of fundamental solutions. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences.* 15, 2008.
- [9] V.D. Kupradze, M.A. Aleksidze, The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. *USSR. Comput. Math. Math. Phys.* 4(4), 82-126, 1964.
- [10] A. Rap. Inverse contaminant flow problems using boundary element methods. Phd thesis. University of Leeds, 2005.
- [11] W.J. Santos, J.A.F. Santiago, J.C.F Telles, An Application of Genetic Algorithms and the Method of Fundamental Solutions to Simulate Cathodic Protection Systems, *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* 87(1) 23-40, 2012.
- [12] A.J. Silva Neto, J.C. Becceneri, Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicação em Problemas Inversos e Transferência Radiativa, vol. 41, 2a Edição. *Notas em Matemática Aplicada*. SBMAC, São Carlos, 2012.