

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Determinação de autovalores em problemas escalares setorialmente homogêneos tridimensionais pelo MEC

João Paulo Barbosa<sup>1</sup>

Instituto Federal do Espírito Santo, IFES, São Mateus, ES

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Carlos Friedrich Loeffler<sup>2</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Hercules de Melo Barcelos<sup>3</sup>

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO, Duque de Caxias, RJ

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

**Resumo.** Este trabalho mostra uma nova formulação do Método dos Elementos de Contorno, desenvolvida para o cálculo de autovalores em problemas tridimensionais escalares setorialmente homogêneos, onde se acopla a técnica de superposição de domínios com a técnica de interpolação direta com funções radiais. A primeira cuida da homogeneidade setorial, dividindo o domínio em uma parte homogênea circundante e outras complementares com diferentes propriedades constitutivas. A segunda transforma a integral de domínio referente à inércia em uma integral de contorno. Assim, após a discretização, forma-se um sistema matricial clássico em que a obtenção das frequências se faz pela solução de um problema de autovalor. Comparam-se os resultados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos.

**Palavras-chave.** Método dos Elementos de Contorno, Problemas de autovalor tridimensionais; Problemas setorialmente homogêneos.

## 1 Introdução

A Equação de Helmholtz [2] surge naturalmente em muitas áreas da engenharia e da ciência, representando problemas de eletromagnetismo, vibração e acústica, envolvendo análise da propagação, reflexão e dispersão de ondas no domínio da frequência. Tem importância fundamental em aplicações diversas como a dispersão de ruído, tecnologia de radar, sonar e sismologia. Pode ser entendida como uma simplificação da Equação da Onda [3], ou seja, uma forma independente do tempo, onde se busca encontrar as possíveis configurações do movimento gerado pela propagação de ondas a partir de uma excitação cuja frequência é conhecida. Assim, a amplitude da resposta resultante  $u(X)$  depende

---

<sup>1</sup>jpbarbosa@ifes.edu.br

<sup>2</sup>carlosloeffler@bol.com.br

<sup>3</sup>engercules@gmail.com

apenas da posição no espaço e o movimento resulta implicitamente do conteúdo temporal da excitação imposta.

Os problemas governados pela Equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos: problemas diretos, problemas de autovalor e problemas inversos. Nos problemas diretos objetiva-se determinar as amplitudes da onda  $u(X)$  em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas. Tais amplitudes são configurações de equilíbrio assumidas pelo sistema diante de uma excitação conhecida e permanentemente aplicada. Nos problemas de autovalor, buscam-se encontrar todos os valores das frequências naturais, denominados  $\omega_n$ , associados aos problemas de vibração livre. Nos problemas inversos, determinam-se as propriedades do meio perante o conhecimento da resposta do sistema.

## 2 Resenha bibliográfica

Devido às aplicações cada vez mais arrojadas da engenharia moderna, a solução numérica da Equação de Helmholtz é um tema que ainda está sendo pesquisado na literatura especializada utilizando diferentes métodos [11,13], buscando melhor precisão e custo computacional acessível. Ainda não há efetivamente uma técnica dominante neste campo e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é considerado uma das mais eficazes na solução desses problemas, pois permite uma avaliação precisa do campo de pressão acústica difratada por barreiras [14], que consiste em uma situação prática muito importante. Vários modelos recentes usando equações integrais de contorno encontram-se na literatura [5,6,17].

Quanto às metodologias para resolver problemas de Helmholtz homogêneos, a formulação clássica do MEC [1] tem restrições, apesar de sua elegância matemática, pois a solução fundamental depende da frequência de excitação. Isso impede a formação de uma matriz de inércia independente e o cálculo dos autovalores não se faz diretamente.

Já os problemas de Helmholtz setorialmente homogêneos são relativamente pouco abordados pelo MEC. Uma vez que a metodologia clássica se baseia em soluções fundamentais correlacionadas, Shaw apresenta uma coleção de funções de Green para o meio heterogêneo em problemas escalares estacionários [15] e em problemas de Helmholtz [16]. Modelos híbridos com soluções fundamentais homogêneas também foram propostos para eliminar as integrações de domínio em problemas potenciais em meios heterogêneos [12]. Através do método de colocação com funções radiais [4] resolveu-se casos acústicos heterogêneos.

Em particular, nas situações relativas aos domínios homogêneos por partes, a técnica da sub-região [1] seria a ferramenta MEC mais adequada, e foi empregada com a Dupla Reciprocidade [9] para resolver problemas de autovalor, obtendo resultados com precisão apenas razoável. Recentemente, [10] apresentou uma abordagem alternativa denominada técnica de superposição de domínios (TSD). Nesta técnica, o problema completo é modelado como uma superposição de um domínio homogêneo circundante e um conjunto de subdomínios internos complementares com propriedades diferentes. A energia de cada subdomínio é computada ao sistema como um todo por superposição. Todos os setores são conectados por meio dos coeficientes de influência, gerados por integrações realizadas nos subdomínios com os pontos fontes localizados em cada ponto nodal, tanto externos quanto internos. Inicialmente, problemas simples foram resolvidos e comparações com a

técnica de sub-regiões foram realizadas, para problemas de Laplace [10]. Aplicações em domínios com irregularidades também foram feitas [8].

Neste trabalho, a TSD é acoplada ao procedimento de interpolação direta (MECID) para identificar o espectro de frequências naturais em domínios tridimensionais com homogeneidade setorial [7]. Resolve-se assim um problema de importância na sismica de prospecção e na dinâmica estrutural através de uma nova formulação, que pode ser estendida em futuras aplicações de propagação de ondas. Para melhor avaliação da exatidão da metodologia proposta, a solução de alguns problemas de teste é comparada com a obtida com o Método dos Elementos Finitos usando malhas bastante refinadas.

### 3 Modelo Matemático

Na TSD, considera-se que o domínio completo  $\Omega(X)$  pode ser decomposto como a soma dos domínios envolvente  $\Omega^e$  e interno  $\Omega^p$ .  $K^e$  e  $\rho^e$  representam respectivamente as propriedades de rigidez e inércia do domínio circundante e  $K^p$  e  $\rho^p$  correspondem às mesmas propriedades no domínio interno, assumidas nestes como constantes, conforme mostra a Figura 1:

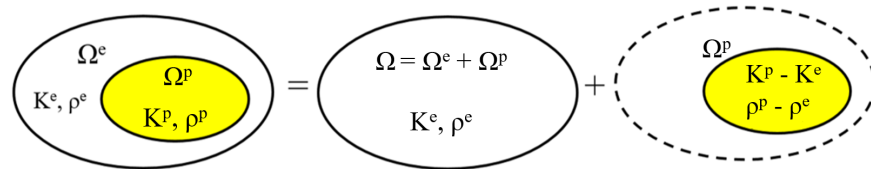


Figura 1: O domínio original modelado como a soma dos domínios envolventes e setoriais.

Usando uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$ , assumindo que os núcleos integrais são compostos de funções integráveis e considerando que  $K^s = K^p - K^e$  e também  $\rho^s = \rho^p - \rho^e$ , é possível escrever uma forma integral forte associada à equação de Helmholtz:

$$\begin{aligned}
 K^e \int_{\Omega} u(X)_{,mm} u^*(\xi; X) d\Omega + K^s \int_{\Omega^p} u^p(X)_{,mm} u^*(\xi; X) d\Omega^p = \\
 -\rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^p} u^p(X) u^*(\xi; X) d\Omega^p
 \end{aligned} \tag{1}$$

Na equação 1,  $u(X)$  é o potencial que representa a amplitude. O índice  $p$  sobrescrito neste caso representa valores internos dessa grandeza. Embora o problema seja governado pela equação de Helmholtz, a função auxiliar é a solução fundamental correspondente ao problema de Laplace em três dimensões [1]. Através do MECID, os termos referentes à inércia podem ser regularizados e transformados em integrais de contorno, usando uma função radial primitiva auxiliar  $\eta^j$  [7]:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^p} u^p(X) u^*(\xi; X) d\Omega^p = \\
 \omega^2 \rho^e (\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma) + \omega^2 \rho^s (\xi \alpha^j \int_{\Gamma^p} \eta^j d\Gamma^p)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Neste ponto, a equação integral completa de contorno está na forma:

$$K^e [c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma] + K^s [c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma^p} u^p(X)q^*(\xi; X)d\Gamma^p] = \omega^2 \rho^e (\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,m}^* n_m d\Gamma) + \omega^2 \rho^s (\xi \alpha^j \int_{\Gamma^p} \eta^j d\Gamma^p + u(\xi) \int_{\Gamma^p} G_{,m}^* n_m d\Gamma^p) \quad (3)$$

Na equação 3,  $q$  e  $q^*$  são derivadas normais de  $u$  e  $u^*$  respectivamente.  $G^*$  é o Tensor de Galerkin [1]. Então, após o procedimento de discretização [7], tem-se:

$$[H]\{u\} + [H^s]\{u^s\} - [G]\{q\} = \omega^2[M]\{u\} + \omega^2[M^s]\{u^s\} \quad (4)$$

Na Figura 2 apresenta-se a convenção usada para expandir a forma matricial anterior. Os subscritos  $c$  indicam os pontos no contorno externo, os subscritos  $i$  indicam os pontos interpolantes externos ao subdomínio, os subscritos  $i'$  indicam os pontos de interpolantes internos para o subdomínio e os subscritos  $s$  indicam os pontos no contorno do subdomínio.

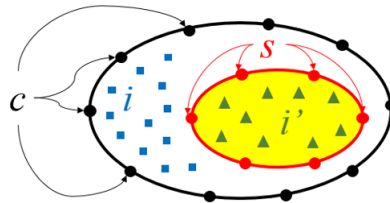


Figura 2: Diferentes posicionamentos dos pontos fontes nos domínios.

A forma expandida das matrizes do MEC, de acordo com a equação 4, mostra que muitas submatrizes de  $G$  são zero, assim como algumas submatrizes de  $H$ , já que não há caracterização de uma relação consistente entre os diversos tipos de pontos fonte descritos anteriormente. Na equação 5, a nova matriz  $H$  é a soma das matrizes  $[H]$  e  $[H^S]$  e a nova matriz  $M$  é a soma das matrizes  $[M]$  e  $[M^S]$ .

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & H_{cs} \\ H_{ic} & H_{ii} & 0_{ii'} & H_{is} \\ H_{i'c} & 0_{i'i} & H_{i'i'} & H_{i's} \\ H_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & H_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & 0_{cs} \\ G_{ic} & 0_{ii} & 0_{ii'} & 0_{is} \\ G_{i'c} & 0_{i'i} & 0_{i'i'} & 0_{i's} \\ G_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & 0_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ q_i \\ q_{i'} \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} & M_{ci'} & M_{cs} \\ M_{ic} & M_{ii} & M_{ii'} & M_{is} \\ M_{i'c} & M_{i'i} & M_{i'i'} & M_{i's} \\ M_{sc} & M_{si} & M_{si'} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{pmatrix} \quad (5)$$

A equação matricial anterior precisa ser adequadamente manipulada para formular o problema do autovalor, no qual os valores nodais  $u$  e  $q$  são prescritos iguais a zero. Detalhes sobre procedimentos matemáticos podem ser encontrados nas referências [8, 10].

## 4 Exemplo de Aplicação

Um bloco quadrado que apresenta uma inclusão quadrada é resolvido. Excluindo o plano fixado  $y = z = 0$ , os demais planos estão com as condições nulas de Neumann, vide Figura 3. Inicialmente as propriedades físicas são: módulo de elasticidade externo  $K^e = 1$  e interno  $K^p = 2$ ; massa específica do setor circundante  $\rho^e = 1$  e interna  $\rho^p = 0,5$ . Consideraram-se quatro malhas com diferentes quantidades de pontos nodais no contorno externos e interno, e com diferentes quantidades de pontos de interpolação no interior de cada domínio, conforme mostrado na Tabela 1, afim de avaliar a importância na melhoria dos resultados. Na Tabela 2 apresentam-se os valores das frequências naturais calculadas com as diferentes malhas do MEC. Percebe-se que para o intervalo de frequências examinado, o desempenho foi praticamente o mesmo para todas as malhas empregadas.

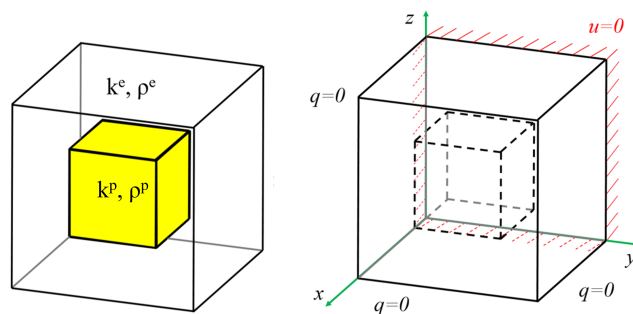


Figura 3: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo de aplicação.

Tabela 1: Número de pontos em cada malha.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
Número de elementos	768	1200	1728	2352
Pontos externos	486	726	1014	1350
Pontos intermediários	448	604	706	604
Pontos superposição	386	602	866	602
Pontos internos a superposição	544	577	736	1016
Total de pontos	1864	2509	3322	3547

A comparação com as frequências calculadas com o MEF foram plotados na Figura 4.

## 5 Conclusões

A solução do problema de autovalor permite uma precisa identificação da qualidade do modelo numérico proposto pela comparação direta das frequências com os valores dados por outro método. Assim, de acordo com os resultados apresentados, o acoplamento da TSD com o MECID foi bem-sucedido, envolvendo problemas setorialmente homogêneos tridimensionais.

Tabela 2: Resultado das frequências naturais.

Freq.	MEF	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
1	1,686910	1,720890	1,714740	1,711930	1,708630
2	3,791651	3,838320	3,820290	3,812840	3,803250
3	3,791651	3,839810	3,821240	3,813840	3,804430
4	4,872107	4,948110	4,918180	4,905910	4,893280
5	4,980115	5,127450	5,102760	5,092040	5,077490
6	5,893062	6,020400	5,984800	5,970750	5,949970
7	5,893062	6,023870	5,986190	5,972060	5,954360
8	6,611796	6,768070	6,714130	6,694410	6,671780
9	6,683424	6,859920	6,816810	6,796440	6,687250
10	6,966796	7,090360	7,045690	7,020670	6,996130

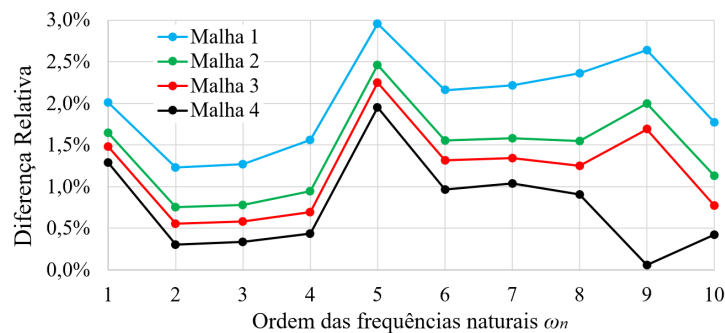


Figura 4: Diferença relativa entre MEC e MEF.

Como ocorre em todo problema dinâmico tridimensional, o modelo proposto requer numerosos pontos de interpolação internos, especialmente se as condições de contorno envolverem a prescrição do potencial, eliminando graus de liberdade no sistema, que são fundamentais no estudo vibracional. No entanto, o modelo mostrou-se convergente tanto para o aumento dos pontos interpolantes quanto para o aumento do número de pontos nodais no contorno, sem qualquer tendência à instabilidade. Naturalmente, a precisão diminui quanto maior for a faixa de frequência calculada; porém, dentro do espectro analisado, a precisão foi bastante satisfatória, com pequena diferença relativa entre o modelo proposto e o resultado do MEF.

## Referências

- [1] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1973.
- [3] W. C. Elmore, M. A. Heald. *Physics of Waves*. Dover Public., New York, 1985.

- [4] L. Godinho, A. Tadeu. Acoustic analysis of heterogeneous domains coupling the BEM with Kansa's method, *Eng Anal Bound Elem*, 36:1014-1026, 2012.
- [5] X. Jiang, W. Chen, C. S. Chen. Fast multipole accelerated boundary knot method for inhomogeneous Helmholtz problems, *Eng Anal Bound Elem*, 37:1239-1243, 2013.
- [6] C. Liu, L. Chen, W. Zhao, H. Chen. Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions, *Eng Anal Bound Elem*, 85:142-157, 2017.
- [7] C. F. Loeffler, J. P. Barbosa. Aplicação da Técnica da superposição de domínios do método dos elementos de contorno na determinação de frequências naturais em domínios setorialmente heterogêneos, *XXXVIII-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2017. DOI:10.20906/CPS/CILAMCE2017-0534
- [8] C. F. Loeffler, J. P. Barbosa, H. M. Barcelos. Performance of BEM Superposition Technique for Solving Sectorially Heterogeneous Laplace's Problems with Non-regular Geometry, *Eng Anal Bound Elem*, 93:105-111, 2018.
- [9] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. Free Vibration in Bars and Membranes modeled by Boundary Element Method (in portuguese), *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno Eng Civil*, 4(2):5-23, 1986.
- [10] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements, *Eng Anal Bound Elem*, 71:169-173, 2016.
- [11] A. F. D. Loula, D. T. Fernandes. A quasi optimal Petrov-Galerkin method for Helmholtz problem, *Int J Numer Methods Eng*, 38(3):371-397, 2009.
- [12] T. F. Luiz, L. S. Miers, J. C. F. Telles. An application of the OMLS method to domain integrals of potential problems in heterogeneous media, *Eng Anal Bound Elem*, 34:920-926, 2010.
- [13] B. Pluymers, B. Van Hal, D. Vandepitte, W. Desmet. Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics, *Arch Comput Methods*, 14(4):343-381, 2007.
- [14] R. Seznec. Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique, *Journal of Sound and Vibration*, 73:195-209, 1980.
- [15] R. P. Shaw. Green's functions for heterogeneous media potential problems, *Eng Anal Bound Elem*, 13:219-221, 1994.
- [16] R. P. Shaw, G. D. Manolis. A generalized Helmholtz equation fundamental solution using a conformal mapping and dependent variable transformation, *Eng Anal Bound Elem*, 24:177-188, 2000.
- [17] F. Z. Wang, K. H. Zheng. Analysis of the Boundary Knot Method for 3D Helmholtz-Type Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:1-9, 2014. DOI:10.1155/2014/853252