
Determinação da Cota Superior no método Fast Crack Bounds (FCB) de propagação de trinca - modelo de Forman¹

Alexandre Guilherme de Lara²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Hilbeth Parente Azikri de Deus³

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo. Este trabalho se propõe a desenvolver uma nova forma de determinação da cota superior da metodologia de análise de propagação de trinca *Fast Crack Bounds* (FCB) para o modelo de Forman. O método de FCB apresenta duas equações que criam um envelope com a cota superior e inferior do crescimento de uma trinca sujeita à tensão constante. A cota superior foi obtida por inspeção com um desvio máximo de 5%. O presente estudo visa a utilização da segunda derivada da EDO da equação de Forman para estabelecimento da cota superior.

Palavras-chave. Fadiga, Propagação de trinca, Fast Crack Bounds, modelo de Forman.

1 Introdução

Dentre os métodos existentes para previsão vida útil de estruturas sob fadiga destaca-se a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que se propõe a estudar e descrever a propagação de uma trinca ou falha existente no material [1,2]. A MFLE pode ser aplicada a uma grande gama de materiais, tendo em vista que a maioria possui trincas. O método *Fast Crack Bounds* (FCB) consiste no estabelecimento de duas equações, sendo uma para a cota superior outra para a inferior, obtidas pela expansão em Taylor com resto em Lagrange dos modelos de propagação de trincas descritos na Tabela 1 [3]. A cota superior (a), que representa o tamanho máximo de uma trinca, se baseia em um parâmetro a^* (a estrela), cujo valor foi obtido por meio de inspeção. O presente trabalho apresenta uma nova forma de estabelecer a cota superior para o método *Fast Crack Bounds* na análise de propagação de trinca, sujeito à amplitude de tensão constante, para o modelo de Forman. O trabalho está organizado da seguinte forma, as equações e hipóteses relacionadas ao método FCB estão na seção 2. O parâmetro a^* para a cota superior na seção 3. Uma nova forma de estabelecer a cota superior está na seção 4. Empregou-se dois exemplos numéricos para o modelo de Forman na seção 5, e as conclusões constam na seção 6.

¹Fast Crack Bounds: Análise rápida de contorno, tradução livre

²alara@alunos.utfpr.edu.br

³azikri@utfpr.edu.br

Tabela 1: Modelos de propagação de trinca sujeitos a Amplitude Constante.

Modelos	Características
Paris-Erdogan $da/dN=C_P(\Delta K)^{m_P}$	Não considera a razão de tensão: R; É válido somente para a região II.
Forman $da/dN = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura K_C ; É válido somente para as regiões II e III.

Fonte: Adaptado pelo autor [3].

2 Fast Crack Bounds

O método *Fast Crack Bounds* foi proposto por Ávila e Santos [2,3,4,5] como forma de aprimorar o método de solução para um Problema de Valor Inicial (PVI) em estudos de crescimento de trinca. O método consiste em duas funções denominadas cota superior, em inglês *Upper Bound* (UP) e cota inferior, em inglês *Lower Bound* (LB). De forma a avaliar e validar o método comparou-se o resultado das cotas (também denominado envelope) com a solução numérica de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para alguns exemplos.

O método FCB pode ser expresso como: $a_{LB}(N) \leq a(N) \leq a_{UB}(N), \forall N \in [N_0, N_1]$, em que $a_{LB}(\cdot)$ e $a_{UB}(\cdot)$ são as funções da cota superior e inferior respectivamente.

3 O Parâmetro da cota superior a^* (a estrela)

A cota superior é função do parâmetro a^* (a estrela). Os trabalhos propostos por Ávila, Santos e demais autores [2,3,4,5] arbitraram um valor específico de a^* por inspeção, de tal forma que apresentasse um desvio máximo de 5% em relação a solução analítica obtida pelo método RK4. O valor de a^* utilizado é $a^* = \alpha.a_0$, sendo α uma constante. Os valores de a^* obtidos por inspeção para os modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvelly e Priddle, de acordo com os autores são: $a^* = 1,3a_0$; $a^* = 1,3a_0$; $a^* = 1,5a_0$; $a^* = 1,03a_0$; e $a^* = 3,5a_0$, respectivamente. Estes valores foram estabelecidos por meio de simulações numéricas para diferentes parâmetros, em comparação com os valores obtidos através do RK4, de maneira a aproximar a cota superior da solução analítica.

Para fins de comparação foram utilizados os mesmo parâmetros propostos por Santos (2015), quais sejam: $C = 6,9 \times 10^{-12}$, $m=3$, e $\Delta\sigma, N_0 = 0. N_{final} = 900.000$ ciclos.

4 Estabelecimento de nova metodologia para a Cota Superior

Esta seção apresenta as funções da cota superior e inferior para o tamanho de trinca, e uma nova forma de determinar a cota superior.

4.1 Cota Superior e Inferior para o modelo de Forman

As cotas inferior e superior são baseadas nas seguintes hipóteses, em relação ao carregamento e ao fator de correção de intensidade de tensão:

$$H1 : \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$H2 : \begin{cases} f \in C^1([a_0, a_1]; \mathfrak{R}^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases}$$

$$H3 : m \geq 2.$$

O problema de valor inicial (PVI) para o modelo de propagação de trinca de Forman, conforme tabela 1, pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1), \text{ tal que :} \\ \left(\frac{da}{dN}\right)(N) = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (1)$$

em que da/dN é a taxa de propagação da trinca, N é o número de ciclos, C e m são constantes do material. O modelo de Forman resulta de um aprimoramento do modelo de Paris-Erdogan, levando em consideração dois fatores, a razão de tensão, R , e a instabilidade do crescimento da trinca quando o fator intensidade de tensão se aproxima do valor crítico, K_C . [6]. O termo ΔK é o fator de intensidade de tensão, e pode ser expresso como [6]:

$$\Delta K(a(N)) = (K_{max} - K_{min}(a(N))) = \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta\sigma. \quad (2)$$

O termo $f(a)$ na equação 2 é a função de correção do fator de intensidade de tensão, relacionado com o carregamento aplicado a forma geométrica do componente com a trinca, e o $\Delta\sigma$ é a amplitude de tensão constante.[2]

O teorema proposto por Ávila e Santos [3] é: Seja $f(a)$ e $\Delta\sigma$ funções que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2), respectivamente, e $a^* \in [a_0, a_1]$, então as seguintes cotas superior e inferior são válidas:

$$\text{Teorema 4.1. } a(N)-a_0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F(\Delta K(a^*))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a^*)} \right]^2 \cdot \\ \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{(2a^*)} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a^*) \right] \Delta N \end{array} \right\} \Delta N$$

$$\text{Teorema 4.2. } a(N)-a_0 \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} \right]^2 \cdot \\ \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{(2a_0)} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a_0) \right] \Delta N \end{array} \right\} \Delta N$$

, sendo $\Delta N = (N - N_0)$, $\forall N \in [N_0, N_1]$.

4.2 Estabelecendo a Cota Superior (UB) com base na segunda derivada

Dada a função $da/dN = h(a)$, em que $a = a(N)$, e, supondo um particionamento do domínio $[N_0, N_p]$, tal que $N_0, N_1, \dots, N_{p-1}, N_f = N_p$. Designando $a_i \approx a(N_i), \forall i = 0, \dots, p$. Para o ponto N_{i+1} da partição: $\frac{da}{dN}|_{N_{i+1}} \approx h(a_i); \forall i = 0, \dots, p$. Através de uma expansão por Taylor de primeira ordem é possível determinar a cota inferior como: $\frac{da}{dN} \approx h(a_0) + \frac{dh}{dN}(a_0)(N - N_0)$. Supondo $\frac{da}{dN} \approx \frac{a(N)-a(N_0)}{N-N_0}$, é possível escrever a expansão de segunda ordem como:

$$\underline{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2. \quad (3)$$

A cota superior pode ser aproximada pela forma $\frac{da}{dN} \approx h(a_0) + \frac{dh}{dN}(a^*)(N - N_0)$, em que $a^* = a(\eta)$ e $\eta \in [N_0, N_p]$.

Supondo $\frac{da}{dN} \approx \frac{\bar{a}(N)-a(N_0)}{N-N_0}$, é possível escrever a expansão em segunda ordem como:

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2. \quad (4)$$

As equações 3 e 4 implicam:

$$|\bar{a} - \underline{a}| = \left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) - \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| (N - N_0)^2 \geq \left| \left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| - \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right| (N - N_0)^2. \quad (5)$$

A equação equação 5 implica:

$$\left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| \in \left(\left| \frac{\bar{a} - \underline{a}}{(N - N_0)^2} \right| - \frac{d^2a}{dN^2}(N_0); \left| \frac{\bar{a} - \underline{a}}{(N - N_0)^2} \right| + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right). \quad (6)$$

No presente trabalho, para determinar a cota superior, propõe-se utilizar o valor da segunda derivada apresentada pela equação 6 obtido a partir da segunda derivada da cota inferior ($N/2$), conforme pode ser observado na equação 7:

$$\bar{a} = a_0 + \frac{da}{dN}(a(N_0))(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(a(\eta))(N - N_0)^2, \quad (7)$$

para $\eta = N/2, \forall N \in [N_0, N_p]$.

5 Exemplos Numéricos

No sentido de avaliar a nova cota superior proposta no presente artigo, o problema de valor inicial (PVI) foi desenvolvido para dois exemplos infra citados. Foram calculados quatro valores, os três propostos por Ávila e Santos [2], quais sejam: cota inferior (LB), cota superior (UB) e solução analítica por Runge Kutta de quarta ordem (KR4), além da nova forma de cálculo proposta no presente trabalho para a cota superior (UB *a** nova). Os cálculos foram programados com a utilização do *software* livre GNU Octave.

5.1 Exemplo 01: Placa finita com uma trinca central

O primeiro exemplo refere-se a uma placa finita com uma trinca central. A função de correção do fator de intensidade de tensão, ilustrada na figura 1, pode ser calculado pela expressão [8]: $f(a(N)) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a(N)}{2b}\right)}$.

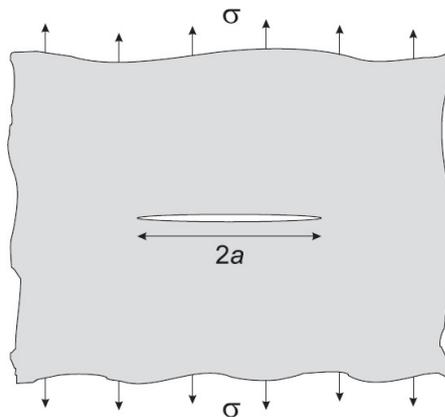


Figura 1: Placa finita com trinca central de comprimento $2a$ [1].

O resultado da aplicação numérica ao exemplo 1 pode ser observado na figura 2, que ilustra o crescimento da trinca com os diversos parâmetros propostos. É possível constatar uma melhora na precisão, ou seja, uma aproximação da cota superior do envelope em relação à solução analítica.

5.2 Exemplo 02: placa finita com uma trinca em uma das arestas

No segundo exemplo utilizou-se uma placa de largura finita com uma trinca na borda da placa. A função de correção do fator de tensão é definida por Tada *et al*[8], conforme a equação 8:

$$f(a(N)) = 1.122 - 0.231\left(\frac{a}{b}\right) + 10.55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{b}\right)^4. \quad (8)$$

O resultado deste exemplo pode ser observado na figura 3. A figura 3 demonstra o crescimento de trinca (os quatro valores calculados). É possível observar que para este

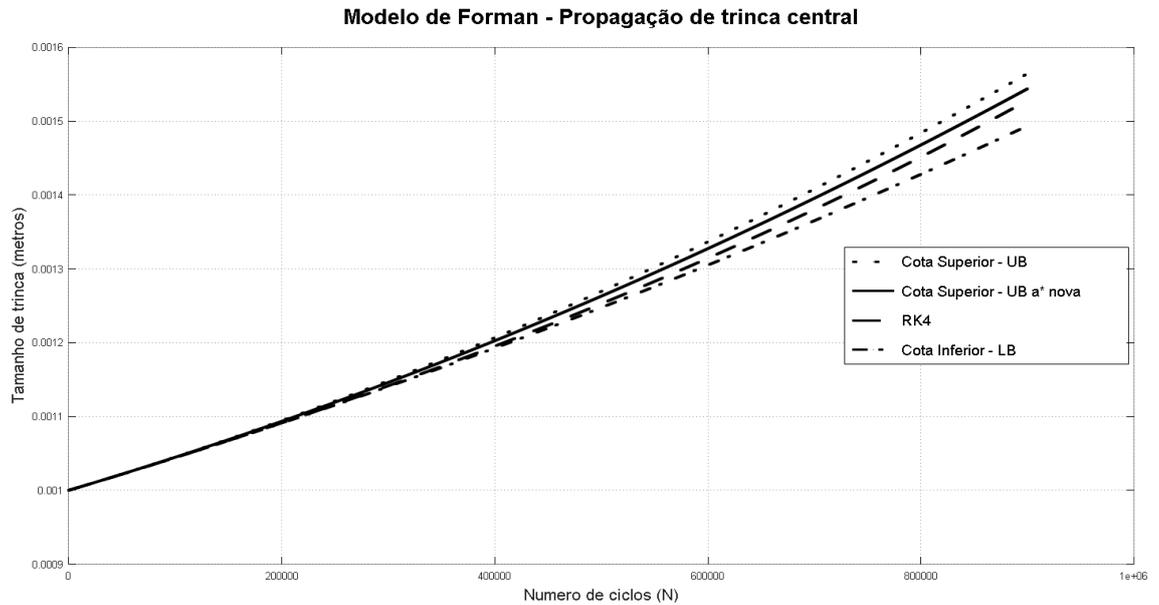


Figura 2: Crescimento de trinca pelo FCB comparado ao RK4.

exemplo a nova metodologia não apresenta melhora em relação ao método proposto por Santos para números de ciclo da ordem de 10^5 . Apesar do desvio da nova metodologia ser superior ao valor obtido por inspação, ele permanece válido para aplicação no FCB, e inferior aos 5% de desvio em relação a solução analítica.

6 Conclusões

O presente trabalho apresenta uma nova forma de determinação da cota superior para emprego da metodologia Fast Crack Bounds de propagação de trinca para o modelo de Forman. Utilizou-se de dois exemplos numéricos para comparar a nova metodologia com a anteriormente proposta. Dos dois exemplos observou-se uma melhora na aplicação do primeiro. Muito embora para o segundo exemplo o presente método não tenha sido capaz de apresentar uma melhora da cota superior, constatou-se que resultado continua sendo válido como cota superior e dentro do desvio máximo de cinco por cento. Portanto é possível inferir que a presente abordagem é válida para a determinação da cota superior de modelo de propagação de trinca de Forman pelo método FCB.

Referências

- [1] M. Janssen, J. Zuidema, e R. J.H. Wanhill. *Fracture Mechanics.*, 2a edição. Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft, 2002.

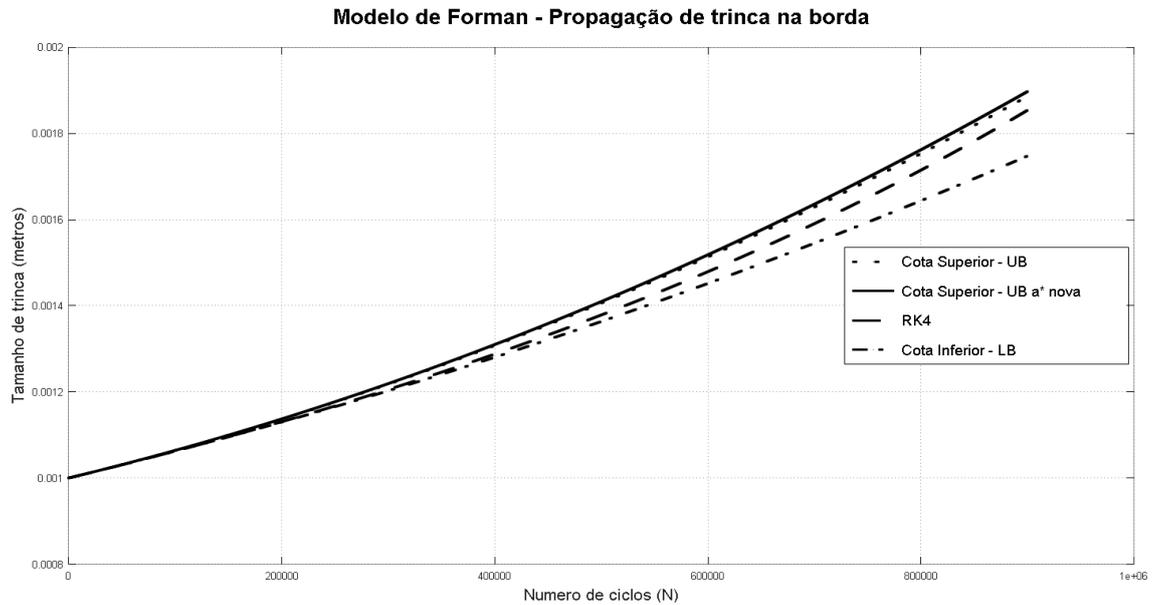


Figura 3: Crescimento de trinca pelo FCB comparado ao RK4.

- [2] C. R. Ávila e R. V. Santos. *Bounds for the Propagation of Crack Forman*. International Journal of Sciences: Basic and Applied Research (IJSBAR). 22:219-231. 2015. ISSN 2307-4531.
- [3] R. V. Santos. Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante, Tese de Doutorado, UTFPR/PPGEM, 2015.
- [4] C. R. Ávila, R. V. Santos e A. T. Beck. *Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation*, Applied Mathematical Modelling, 40:2312-2321. 2015 DOI 10.1016/j.apm.2015.09.053.
- [5] R. V. Santos, W. M. Machado e C. A. Silva, *Fast crack bounds method applied to crack propagation models under constant amplitude loading*, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Volume 41, 2019. DOI 10.1007/s40430-018-1517-6.
- [6] R. G. Forman, V. E. Kearney, R. M. Engle, *Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structure*, American Society of Mechanical Engineers, 89:459-464. 1967. DOI: 10.1115/1.3609637
- [7] S. R. Lampman. *ASM Handbook: Volume 19, Fatigue and Fracture*. ASM International, 1996.
- [8] H. Tada; P. Paris; G. R. Irwin, *stress analysis of crack handbook*. New York: ASME Press, 2000.