Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Proposta de um indicador do tipo Gini para medição do desempenho escolar

Érika Capelato [1]
Departamento de Economia, Faculdade de Ciências e Letras, UNESP, Araraquara, SP
Jamil Gomes de Abreu Jr [2]
Departamento de Matemática Aplicada, CEUNES, UFES, São Mateus, ES

Resumo. Neste artigo propomos um indicador do tipo Gini para medir o desempenho de um grupo de pessoas, ou mesmo populações inteiras, que foram submetidas a algum tipo de teste cujo resultado final é resumido por um único número. O índice de Gini é um valor estatístico que mede o quão equitativa é a distribuição de um recurso em uma população. Em nosso contexto, o indicador permitirá observar não apenas a uniformidade na distribuição das notas de uma avaliação mas, de algum modo, mensurar aquilo que se pode denominar desempenho escolar, noção esta que deve ser discutida mais amplamente, contudo, num outro momento.

Palavras-chave. Índice de Gini, Probabilidade, Desempenho Escolar

1 Introdução

O nível educacional de um país ou de uma sociedade diz muito sobre o seu desenvolvimento econômico e social e vice-versa. De acordo com Piketty [5]

> A segunda conclusão, que constitui o cerne deste livro, é que a dinâmica da distribuição da riqueza revela uma engrenagem poderosa que ora tende para a convergência([3]), ora para a divergência, (...). As principais forças que propelem a convergência são os processos de difusão do conhecimento e investimento na qualificação e na formação de mão de obra. (...) O processo de difusão de conhecimentos e competências é o principal instrumento para aumentar a produtividade e ao mesmo tempo diminuir a desigualdade, tanto dentro de um país quanto entre diferentes países, (...). [5, pp. 27-28]

Por esta razão, as avaliações da educação em larga escala têm assumido um papel marcante nas políticas educacionais brasileiras. Neste artigo, propomos uma metodologia

[1] erika.capelato@unesp.br.
[2] jamil.abreu@ufes.br.
[3] Isto é, que reduzem e comprimem a desigualdade.

para medir o desempenho escolar inspirada no chamado *índice de Gini*, o qual foi originalmente usado para medir desigualdade de renda e riqueza. Este índice, introduzido pelo estatístico italiano Corrado Gini [3] (veja também [2]), é baseado na *curva de Lorenz*, nome em homenagem ao economista americano Max Otto Lorenz [4].

A curva de Lorenz é o gráfico de uma função que associa a cada $p \in [0,1]$ uma fração de um certo bem (renda, riqueza, comida, terra, notas de uma avaliação, etc.) obtidos pelos $100p\%$ mais pobres de um grupo ou população. Esta função é crescente, convexa e seu gráfico situa-se abaixo da reta da função identidade no intervalo $[0,1]$; chamaremos a reta identidade de *reta de igualdade perfeita*. Em outras palavras, se a população está alinhada por ordem crescente das partes de seus bens em questão, então a cada $p \in [0,1]$ o número $L(p)$ é a fração da totalidade deste bem pertencente a fração p mais pobre da população. Assim, a curva de Lorenz $y = L(p)$ indica a fração do recurso Q recebida pela p-ésima fração inferior da população quando esta está ordenada em forma crescente. A curva de Lorenz seria, em teoria, a própria *reta de igualdade perfeita* $L(p) = p$ se todos recebessem a mesma fração de Q; veja Figura 1.

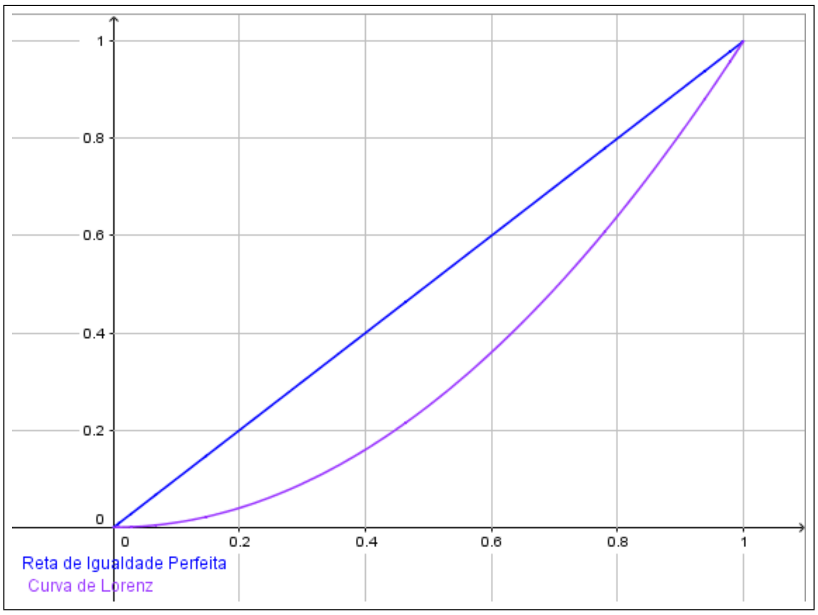

Figura 1: Curva de Lorenz e reta de igualdade perfeita

O índice de Gini é, por definição, a razão entre a área compreendida entre a curva de Lorenz e a reta de igualdade perfeita e a área abaixo desta reta, isto é

$$G = 2\int_0^1 [p - L(p)]dp. \tag{1}$$

Segue que G consiste de um valor entre 0 e 1. Intuitivamente, quanto mais próxima a curva de Lorenz estiver da reta de igualdade perfeita mais igualitária é a distribuição do recurso; isso reflete numericamente numa menor área situada entre ambas as curvas, portanto num menor índice de Gini. Assim, G é tanto menor quanto mais igualitária é

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0421

a distribuição de um recurso e tanto maior quando menos igualitária for a distribuição deste mesmo recurso. Por outro lado, pouco se pode deduzir de seu valor absoluto, exceto quando comparado com um outro valor referente à distribuição do mesmo recurso numa outra população.

Por exemplo, segundo dados do Banco Mundial, o Índice de Gini relativo à distribuição de renda no ano de 2015 é igual a 0,29 para a Suécia e 0,51 para o Brasil. Estes valores indicam que há diferenças significativas entre ambas as sociedades, mas não mostram diferenças concretas como as regalias de políticos e juízes (gritantes no Brasil e inexistentes na Suécia) ou, ainda, a ausência de taxação sobre lucros e dividendos no Brasil e presente nos países ditos desenvolvidos; esta é uma das principais críticas a este índice.

Através de uma conexão com a teoria de probabilidades, Farris [1] introduz um certo parâmetro, denominado *dólar médio*, que aponta novas interpretações para o índice de Gini, permitindo aprofundar o entendimento do índice como medida de desigualdade de uma outra perspectiva. Inspirados no trabalho de Farris [1], construímos neste artigo um procedimento baseado no conceito de curva de Lorenz e no índice de Gini para medir o que chamamos de *desempenho escolar*, ou seja, as habilidades que as pessoas demonstram numa avaliação (ou exame) e cujos resultados são dados em forma de uma única nota.

Do ponto de vista da formulação original do índice de Gini, numa avaliação com notas variando de 0 a 10, o cenário em que todos os alunos tiram nota 1 é tão bom quanto aquele em que todos tiram, digamos, 6, bem como aquele (altamente improvável) em que todos tiram 10; em ambos os casos, as notas estão "bem distribuídas". Entretanto, é razoável que o terceiro cenário seja preferível ao segundo cenário que, por sua vez, é preferível ao primeiro. Nossa versão do índice de Gini tenta incorporar a ideia de que não apenas uma certa uniformidade na distribuição das notas é desejável mas também a de que "quanto maior forem as notas obtidas, melhor".

Suponha que N indivíduos realizem um exame com quantidade total M de pontos. Sejam $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = M$ uma partição do intervalo $[0, M]$, o qual corresponde a faixas de notas atribuídas *a priori*. Suponha que agrupemos as pessoas que pertencem à mesma faixa, de tal forma que h_1 indivíduos tenham obtido notas no intervalo $[0, x_1)$, h_2 indivíduos tenham obtido notas no intervalo $[x_1, x_2)$ e, mais geralmente, h_i indivíduos tenham obtido notas no intervalo $[x_{i-1}, x_i)$. Além disso, suponha que a nota média no intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ é ξ_i. Todas estas informações podem ser organizadas na Tabela 1, onde a i-ésima linha contém dados relativos ao intervalo $[x_{i-1}, x_i)$, com $i = 1, \cdots, n$.

Tabela 1: Notas em exame com valores agregados.

Intervalo de Notas	Número de pessoas no intervalo	Nota média no intervalo
$[x_0, x_1)$	h_1	ξ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[x_{n-1}, x_n)$	h_n	ξ_n

Sejam $N = \sum_{i=1}^{n} h_i$ o número de indivíduos submetidos a um exame, $T = \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i$ o número de pontos obtido pela totalidade destes indivíduos neste exame, o qual é uma fração do valor total $\tau = MN$ de pontos que exame poderia "distribuir". Os números

$$p_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} h_i$$

são os n pontos ao longo do eixo horizontal, entre 0 e 1, representando os percentis em ordem crescente de desempenho na avaliação. O análogo da curva de Lorenz aqui é a função L definida por

$$L(p_j) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{j} \xi_i h_i \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{2}$$

Diferentemente do caso da distribuição de renda onde *todos os recursos são distribuídos*, aqui apenas *parte de todos os recursos são distribuídos*; na verdade, o recurso está disponível, mas deve ser "conquistado", e sua distribuição completa não é obrigatória. A menos que todas as pessoas obtenham a nota máxima (algo altamente improvável), sempre teremos $L(1) < 1$.

Seguindo Farris [1] escrevemos a equação (2) como uma soma de Riemann

$$L(p_j) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{j} \xi_i (p_i - p_{i-1})N = \int_0^{p_i} \sigma(p)\, dp, \tag{3}$$

onde $\sigma(p) = \xi_j/M$ sempre que $p_{j-i} < p < p_j$. Conforme explicado em [1, p. 855], a definição

$$L(p) = \int_0^{p} \sigma(q)\, dq \tag{4}$$

se resume a estender a curva de Lorenz, inicialmente definida no ponto p_j, através de interpolação linear e ao mesmo tempo estabelece L como uma função não decrescente e convexa.

Note que

$$\int_0^1 \sigma(p)\, dp = L(1) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i = \frac{T}{\tau},$$

logo $s(p) = (\tau/T)\sigma(p)$ satisfaz $s(p) \geqslant 0$ e $\int_0^1 s(p)\, dp = 1$, isto é, s é uma função densidade de probabilidade. Qual experimento produz uma variável aleatória com esta função densidade? Seguindo Farris [1], propomos o seguinte. Suponha que escolhamos um ponto aleatoriamente a partir do conjunto que contém todos os pontos atribuídos a todos os indivíduos submetidos ao exame. A probabilidade de que este ponto pertença ao intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ é igual a

$$\frac{\xi_i h_i}{T} = \frac{\tau}{T}\frac{\xi_i}{M}(p_i - p_{i-1}) = \int_{p_{i-1}}^{p_i} s(p)\, dp. \tag{5}$$

Seja $\overline{p}$ o valor esperado da variável aleatória $p \in [0, 1]$ com função densidade de probabilidade s, i.e

$$\overline{p} = \int_0^1 ps(p)dp.$$

Chamamos $\overline{p}$ de *percentil do ponto médio*. Este parâmetro se comporta da seguinte forma: trata-se de um número entre 0,5 e 1; quanto mais bem distribuídos forem os pontos, mais este parâmetro estará próximo de 0,5 e quanto menos bem distribuídos forem os pontos, mais este parâmetro estará próximo de 1. Mas, diferentemente de G, que apenas fornece o valor numérico de uma determinada área entre gráficos, $\overline{p}$ contém informações mais palpáveis, advindas de sua própria definição. Por exemplo, considere dois grupos de 100 alunos que se submeteram a um exame, cujos valores para $\overline{p}$ sejam, respectivamente, iguais a 0,6 e 0,8; a definição de $\overline{p}$ sugere que a média dos pontos (ou o ponto típico sorteado do montante de pontos) pertenceria ao indivíduo localizado na 60ª posição do primeiro grupo e ao indivíduo na 80ª posição do segundo grupo. Em particular, se ambos os grupos obtiveram desempenho aproximadamente equivalente em números absolutos (ou seja, valores de T aproximadamente iguais), fica evidente que o desempenho individual é mais homogêneo no primeiro grupo; evidentemente, isto é mais desejável do que o caso em que um pequeno número de indivíduos dentro do grupo apresenta um desempenho individual muito superior aos demais.

2 Resultado Principal: apresentação e discussão

Teorema 2.1. *Na situação anterior, o índice de Gini G e o* percentil do ponto médio $\overline{p}$ *estão relacionados por*

$$\overline{p} = 1 - \frac{1-G}{2L(1)}. \tag{6}$$

Demonstração. Substituindo a equação (4) na equação (1) temos que

$$\begin{aligned} G &= 2\int_0^1 [p - L(p)]\,dp \\ &= 2\int_0^1 p\,dp - 2\int_0^1\int_0^p \sigma(q)\,dq\,dp \\ &= 1 - 2\int_0^1\int_q^1 \sigma(q)\,dp\,dq \\ &= 1 - 2\int_0^1 (1-q)\sigma(q)\,dq \\ &= 1 - 2L(1) + 2L(1)\int_0^1 qs(q)\,dq. \end{aligned}$$

Isto é claramente equivalente a (6). □

Por outro lado, G pode ser calculado diretamente do conjunto de dados.

Proposição 1. *G pode ser calculado a partir do conjunto de dados como*

$$G = 1 - 2L(1) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} \xi_i (p_{i-1} + p_i) h_i.$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 7, n. 1, 2020.

Demonstração. Basta desenvolver a integral que define $\overline{p}$, quebrando a integral em subintervalos e usando a definição de s. Os detalhes serão omitidos. $\square$

Note que $L(1) = T/\tau$ mede a eficiência do grupo como um todo. Dado o valor $L(1)$, o melhor que se pode esperar em termos de equidade é a curva de Lorenz da forma $y = L(1)p$, pois isto significa que todos tiveram a mesma nota. A área entre L e esta melhor reta é

$$\alpha = \frac{G}{2} - \frac{1 - L(1)}{2},$$

e definimos o *índice de Gini intrínseco* por

$$g = \frac{\alpha}{L(1)/2} = 1 - \frac{1 - G}{L(1)}.$$

Ao inserirmos as duas identidades acima na igualdade (6) obtemos

$$\overline{p} = \frac{1 + g}{2}.$$

3 O cálculo do índice em simulações de desempenho escolar

Agora, vamos considerar seis possíveis cenários fictícios que descrevem o desempenho escolar obtido por um grupo de 100 indivíduos submetidos a uma prova cujas notas variam de 0 (zero) a 10 (dez). Em cada cenário vamos calcular o índice construído na seção anterior e observar o que acontece com os valores $L(1)$, G e $\overline{p}$. As colunas (Cenários 1, 2, 3, 4, 5 e 6) contidas na Tabela 2, trazem o número de indivíduos que têm suas notas nos intervalos correspondentes. Ao nos movermos do cenário 1 para o cenário 6 (com exceção do cenário 3), vemos a massa das maiores notas se deslocarem do intervalo $[9, 10]$ para o intervalo $[0, 1)$. Os cálculos obtidos para cada cenário estão expressos na Tabela 3.

Tabela 2: Simulações do número de notas em cada intervalo

Notas	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5	Cenário 6
$[0, 1)$	1	0	40	2	50	91
$[1, 2)$	1	1	2	2	14	1
$[2, 3)$	1	1	0	3	9	1
$[3, 4)$	1	4	0	9	9	1
$[4, 5)$	1	5	0	10	5	1
$[5, 6)$	1	7	0	50	4	1
$[6, 7)$	1	9	0	10	1	1
$[7, 8)$	1	9	0	8	1	1
$[8, 9)$	1	14	18	4	1	1
$[9, 10]$	91	50	40	2	0	1

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0421

Tabela 3: Valores em cada cenário

Cenários	$L(1)$	G	$\overline{p}$
1	0,9039	0,1392	0,5238
2	0,7955	0,3068	0,5643
3	0,5376	0,6906	0,7122
4	0,5367	0,5478	0,5787
5	0,1753	0,9341	0,8120
6	0,0579	0,9869	0,8869

4 Conclusões

Em linhas gerais, este artigo apresenta a proposta de um indicador que usa apenas uma variável (a nota) para medir o desempenho escolar de um grupo submetido a uma avaliação. Este índice carrega informações relacionadas ao desempenho do grupo, tanto no que concerne à equidade na distribuição das notas quanto à sua proficiência (interpretada no contexto do parâmetro $\overline{p}$). É interessante comparar os cenários 3 e 4. Nossa análise mostra que, se valores menores para G e $\overline{p}$ são preferíveis em situações nas quais o total de pontos é mais ou menos equivalente em números absolutos, então o cenário 4, com a massa das maiores notas concentradas numa faixa intermediária, é desejável a um cenário com extremos inflados.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa número 2018/03327-4.

Referências

[1] F. A. Farris, The Gini index and measures of inequality. *The American Mathematical Monthly*, 117:851–864, 2010. DOI: 10.4169/000298910x523344.

[2] C. Gini, Sulla misura della concentrazioni e della variabilità dei caratteri, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti* LXXIII parte II, 1203-1248, 1914.

[3] C. Gini, Variabilità e mutabilità, 1912. Reprinted in Memorie di metodologica statistica (Ed. Pizetti E, Salvemini, T). Rome, Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1955.

[4] M. O. Lorenz, Methods of measuring the concentration of wealth, *Publications of the American Statistical Association*, volume 9, New Series, 70:209–219, 1905. DOI: 10.2307/2276207.

[5] T. Piketty, *O Capital no Século XXI, 1a. edição*, Editora Intrínseca, Rio de Janeiro, 2014.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0421