

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equação de Richards Fracionária

Junior Cesar Alves Soares ¹

Universidade do Estado de Mato Grosso-UNEMAT

Eliana Contharteze Grigoletto ²

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-UNESP

Luciana Bertholdi Machado ³

Universidade do Estado de Mato Grosso-UNEMAT

Minéia Cappellari Fagundes ⁴

Universidade do Estado de Mato Grosso-UNEMAT

1 Introdução

Os processos dinâmicos da água no solo fazem parte de componentes terrestres do ciclo hidrológico e são muito úteis em vários ramos da ciência e da engenharia, em assuntos relacionados com a irrigação, drenagem, erosão, biologia da fauna e flora do solo, poluição do solo e outros. Segundo Fagundes (2006), esses processos incluem a infiltração, redistribuição, e a evapotranspiração. A infiltração é o processo pelo qual a água entra no solo e perdura enquanto houver disponibilidade de água em sua superfície.

2 Cálculo Fracionário

Hoje, tanto no Brasil quanto no mundo, o cálculo fracionário tem sido uma ferramenta extremamente útil para modelar problemas oriundos da física, engenharia e ciências naturais em geral. Vale destacar que no trabalho de Grigoletto (2014) é apresentado o teorema fundamental do cálculo fracionário entre outras aplicações envolvendo funções de Mittag-Leffler. Em Camargo e Oliveira (2015) é feita uma introdução do cálculo fracionário bem como toda a trajetória histórica dessa área. Em Soares (2016), é apresentado um estudo de equações de evolução utilizando como ferramenta principal o cálculo fracionário. Neste sentido, utilizaremos as ferramentas do cálculo fracionário para estudar o fenômeno de infiltração de água no solo.

¹juniorcasoares@unemat.br

²eliana.contharteze@unesp.br

³lucianabm@unemat.br

⁴mineia@unemat.br

3 Equação de Richards

No processo de infiltração de água no solo estão relacionados o teor de umidade do solo (quantidade de água acumulada) e o potencial da água no solo. Esses fenômenos são descritos na equação Richards, podendo ser aplicada a diversos tipos de solo. Para estudar a equação de Richards precisamos entender alguns conceitos físicos e matemáticos, essenciais para a sua dedução. A equação de Richards abrange o fluxo em três dimensões, x, y, z . Levando em consideração apenas a direção, x ela é dada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right], \quad (1)$$

onde θ é umidade volumétrica (L^3L^{-3}) adimensional, t é o tempo de redistribuição em horas, x é a coordenada horizontal de posição em metros, $D(\theta)$ é a função condutividade hidráulica (L^2T^{-1}). Uma generalização da expressão (1) utilizando ferramentas do cálculo fracionário, em particular, a definição de derivada de Riemann-Liouville, é

$$\frac{\partial^\alpha \theta(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_\alpha(\theta(x, t)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right],$$

em que

$$\frac{\partial^\alpha \theta(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\theta(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

e $D_\alpha[\theta(x, t)]$ é a função condutividade hidráulica dependendo do parâmetro α . Com um modelo mais geral para a equação de Richards proposto em [1] será possível ampliar e refinar o conhecimento do fenômeno de infiltração, em particular, do solo da Bacia do Rio Paraguai.

Agradecimentos

Os autores agradecem a UNEMAT, a FAPEMAT e a UNESP.

Referências

- [1] H. Sun, M.M. Meerschaert, Y. Zhang, J. Zhu and W. Chen, A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media, *Advances in Water Resources*, 52, 292 - 295, 2013. DOI:10.1016/j.advwatres.2012.11.005
- [2] M. C. Fagundes, Modelagem Matemática do crescimento e absorção de água do solo por sistemas radiciais de espécies arbóreas. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática, Unijuí, Ijuí-RS, p. 76, 2006.
- [3] E. C. Grigoletto, Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler. Tese de Doutorado. Unicamp. Campinas-SP, 2014.
- [4] J. C. A. Soares, Cálculo fracionário e as equações de evolução. Tese de Doutorado. Unicamp. Campinas-SP, 2016.
- [5] R. F. Camargo e E. Capelas de Oliveira, Cálculo Fracionário, *Livraria da Física*, 2015.