Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações de Álgebra Linear na Teoria dos grafos

Lucas Pereira Barbosa [1]
Universidade Federal do Espírito Santo
Victor do Nascimento Martins [2]
Universidade Federal do Espírito Santo

1 Introdução

Este trabalho abrange tópicos de álgebra linear e problemas clássicos da teoria dos grafos tendo como objetivo principal aplicar os conceitos de álgebra linear na resolução de problemas e desenvolvimento de tópicos da teoria dos grafos. Denotamos por $G(V, E)$ um grafo, onde V representa o conjunto dos vértices e E o conjunto das arestas.

Certamente o primeiro problema a ser estudado por qualquer pesquisador na área dos grafos é o problema das sete pontes de Königsberg, conhecido como o marco inicial da teoria. Abordamos esse problema para introduzir os conceitos básicos. O problema criado indagava se era possível fazer um passeio por sete pontes que interligavam quatro regiões de uma cidade, passando uma única vez sobre cada uma das pontes. Estudamos os conceitos envolvidos nos teoremas de Euler a respeito do problema das pontes.

Em um segundo momento, passamos a estudar a *A Teoria Espectral dos Grafos*. Essa teoria trata-se de um híbrido entre álgebra linear, teoria dos grafos e combinatória. Nela estudamos definições como as de polinômio característico de um grafo, espectro de um grafo, o raio espectral, isomorfismo de grafos, dentre outras, para finalmente, procurar entender algumas aplicações práticas da teoria.

2 Grafos e Álgebra Linear

O problema das sete pontes de Königsberg pode ser modelado na teoria dos grafos por um grafo com 4 vértices e 7 arestas. E atingir uma solução positiva para o problema consiste, dentro da teoria, no que chamamos de encontrar um passeio de Euler nesse grafo. Euler, responsável por resolver o problema proposto, demonstrou alguns resultados a cerca do mesmo:

Teorema 2.1. *Um grafo G planar permite um passeio de Euler se, e somente se, todos os vértices do grafo possui grau par. E então o grafo é dito* ***Euleriano****.*

[1]lucaspereirabarbosa@hotmail.com
[2]victor.n.martins@ufes.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 7, n. 1, 2020.

Teorema 2.2. *Um grafo G planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro se, e somente se os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem grau par. Nesse caso, o grafo é dito* ***semieuleriano****.*

A partir desses resultados a teoria se desenvolveu e novas vertentes da mesma foram surgindo, como por exemplo o Problema da Coloração de Mapas, os grafos Hamiltonianos e a Teoria Espectral dos Grafos.

A Teoria Espectral dos Grafos originou-se na Química Quântica, em 1931, quando Huckel produziu um modelo teórico para um problema a partir de moléculas de hidrocarbonetos não saturadas em que os níveis de energia de certos elétrons eram representados por autovalores de um grafo. Basicamente, essa teoria tem como objetivo analisar propriedades de grafos através do espectro de algumas matrizes relacionadas a ele, como a Matriz de Adjacência, a Matriz de Incidência e a Matriz Laplaciana.

Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices. A **matriz de adjacência** $A = (a_{ij})_{i,j}$ de G é a matriz quadrada de ordem n onde $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e zero caso contrário. O polinômio característico dessa matriz $p_G = det(A - \lambda Id_n)$, conhecido como polinômio característico do grafo correspondente nos dá informações importantes a respeito do grafo.

Teorema 2.3. $p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *satisfaz:*

(i) $a_1 = 0$*;*

(ii) $a_2 = -m$*, onde m é o número de arestas no grafo.*

(iii) $a_3 = -2t$*, onde t é o número de triângulos no grafo.*

Uma outra forma de aplicar o conceito de matriz de adjacência está relacionado ao número de caminhos entre dois vértices quaisquer do grafo. Suponha um problema de construir um metrô em uma grande cidade. Daí, são escolhidos n locais para representar as estações, digamos $v_1, \ldots, v_n$. Estas estações juntamente com as linhas do metrô formam as interligações entre elas. A partir daí, podemos representar o problema através de um grafo $G(V, E)$. A questão que se coloca é: escolhendo duas estações quaisquer, sempre existe um caminho na rede que as ligue? Para isso, basta o grafo ser conexo. Além disso, conseguimos determinar o número de caminhos de comprimento l utilizando a matriz de adjacência. Basta efetuar A^l, onde l é o comprimento desejado. Cada entrada $a_{i,j}$ na matriz A^l nos dá o número de caminhos de comprimento l entre os vértices v_i, v_j. Portanto, se a equação $A^1 + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$ nos dá somente entradas diferentes de zero, garantimos a conexidade do grafo.

Referências

[1] N. M. M. Abreu, R. R. Del-Vecchio, D. Stevanovic. *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações, 2a. edição.* SBMAC, São Carlos, SP, 2012.

[2] J. C. V. Sampaio, *Uma introdução à Topologia Geométrica passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores.* EdUFSCar, São Carlos, SP, 2008.

