Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Método de Garlerkin descontínuo com técnicas de superpenalização fraca para o modelo de Reissner–Mindlin

Paulo Rafael Bösing

Depto de Matemática, CFM, UFSC,
88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: paulo.bosing@ufsc.br

Carsten Carstensen

Institut für Mathematik,
Humboldt–Universität zu Berlin
Unter den Linden 6, D-10099, Berlin, Germany

Resumo:

Neste artigo introduzimos uma nova formulação descontínua para o modelo de placas de Reissner–Mindlin que combina o método de Galerkin descontínuo como técnicas de superpenalização fraca. Combinando estimativas residuais com operadores de enriquecimento provamos ótimas estimativas de erro a priori *na norma energia.*

Palavras-chave: *Galerkin descontínuo, Reissner–Mindlin, estimativa de erro*

A formulação fraca para o modelo de placas de Reissner–Mindlin é: Dado $g \in L^2(\Omega)$ e $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, encontre $(\boldsymbol{\theta},\ w,\ \boldsymbol{\gamma}) \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta})_\Omega &= (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta})_\Omega \quad \forall\ \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \\ -(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nabla}\, v)_\Omega &= (g,v)_\Omega \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \\ t^2\mu^{-1}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi})_\Omega - (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nabla}\, w,\boldsymbol{\phi})_\Omega &= 0 \quad \forall\ \boldsymbol{\phi} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Aqui, e ao longo deste artigo, t é a espessura da placa, Ω é um domínio poligonal convexo, $e(\boldsymbol{\xi})$ é a parte simétrica do gradiente de $\boldsymbol{\xi}$,

$$\mathcal{C}\, e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{3}\left[\, 2\mu\, e(\boldsymbol{\xi}) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\, I\,\right]$$

em que μ e λ são os coeficientes de Lamé e I é a matriz identidade 2×2, e

$$a(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\eta}) = (e(\boldsymbol{\theta}),\mathcal{C}\, e(\boldsymbol{\eta}))_\Omega.$$

Neste artigo introduzimos uma nova formulação *locking-free* completamente descontínua para (1), que combina o tradicional método de Galerkin descontínuo (dG - *discontinuous Galerkin methods*) com os métodos de penalização interior superpenalizados fracamente (WOPSIP-*weakly over-penalized symmetric interior penalty methods*). Para a primeira equação do modelo de Reissner–Mindlin aplicamos a mesma formulação usada, por exemplo, em [1, 2, 5], enquanto que para a segunda equação introduzimos um tipo de método WOPSIP similar ao apresentado em [9]. Com esta estratégia o termo de penalização para o deslocamento será superpenalizado. No entanto, para aproximação polinomial com grau $k = 2$, para o qual temos a regularidade teórica requerida disponível para domínios convexos (veja Teorema 5 e [3, 4]), a superpenalização (potência de h) será a mesma que a usada em [5] e também em [18, 19, 20] para a equação biharmônica.

Por combinar o dG com técnicas WOPSIP, a formulação resultante não é consistente. Isto nos impede de obter a ortogonalidade de Galerkin. Desse modo, a análise de erro tradicional dos métodos dG não pode ser aplicada. Além disso, como o termo de consistência depende da tensão de cisalhamento, podemos obter somente subótimas estimativas de erro se aplicarmos as técnicas de análise dos WOPSIP. Para obter ótimas estimativas de erro vamos proceder a análise através de estimativas residuais, que são típicas da análise de erro *a posteriori* [11, 17, 10, 12], combinadas com operadores de enriquecimento [6, 7]. Uma abordagem similar foi previamente utilizada, por exemplo, em [13] e [14] para analisar o método dG sobre mínima regularidade. Para ter êxito com esta estratégia precisamos assumir que a decomposição de Helmholtz é válida. Felizmente, este é o caso se $k = 2$ (pelo menos) e se Ω é um domínio poligonal convexo, basicamente.

Procedendo dessa forma, nosso principal resultado, o Teorema 5 (para $k = 2$), mostra uma estimativa de erro ótima na norma energia que requer somente a regularidade provada teoricamente para a solução no caso de um domínio poligonal convexo (ou domínio suave). Além disso, as normas da solução presentes no lado direito são uniformemente limitadas com relação a t.

Observamos que no decorrer deste artigo faremos uso da notação usual dos métodos de Galerkin descontínuos e espaços de Sobolev. Para detalhes veja, por exemplo, [5].

1 Formulação

A nova formulação para o modelo de Reissner–Mindlin que combina WOPSIP e dG usa a seguinte forma bilinear sobre $\left(H^{1+\kappa}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)\times H^1(\mathcal{T})\times L^2(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)\right)^2$ com $\kappa > 1/2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h(\boldsymbol{\xi},u,\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\eta},v,\boldsymbol{\phi}) = \sum_{T\in\mathcal{T}}\big((\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\nabla}_h\, v)_T-(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\nabla}_h\, u,\boldsymbol{\phi})_T+t^2\mu^{-1}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\phi})_T\big)+\\ +\mathcal{B}_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+\mathcal{J}(u,v)\end{aligned}\tag{2}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) &= a_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})-\sum_{E\in\mathcal{E}}\langle\{\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\xi})\},[\![\boldsymbol{\eta}]\!]\rangle_E-\delta\sum_{E\in\mathcal{E}}\langle\{\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\eta})\},[\![\boldsymbol{\xi}]\!]\rangle_E+\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}),\\ a_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) &= \sum_{T\in\mathcal{T}}(\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\xi}),e_h(\boldsymbol{\eta}))_T,\qquad \boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\sum_{E\in\mathcal{E}}\frac{\sigma_1}{h_E}\langle[\![\boldsymbol{\xi}]\!],[\![\boldsymbol{\eta}]\!]\rangle_E\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{J}(u,v)=\sum_{E\in\mathcal{E}}\frac{\sigma_2}{h_E^{\rho}}\langle\boldsymbol{\Pi}^{k-1}[u],\boldsymbol{\Pi}^{k-1}[v]\rangle_E.$$

Além disso, σ_1 e σ_2 são os parâmetros de penalização, $\rho > 1$ (depende de k) será definido a diante, δ é o parâmetro de não simetria/simetria da forma bilinear com $-1 \le \delta \le 1$. O operador $\boldsymbol{\Pi}^{k-1}$ é a projeção ortogonal de $L^2(E;\mathbb{R}^2)$ sobre $\mathcal{P}_{k-1}(E;\mathbb{R}^2)$, em que $\mathcal{P}_{k-1}(E)$ é o espaço dos polinômios de grau menor que ou igual a $k-1$ sobre E. Isto nos fornece a seguinte norma energia

$$|\!|\!|\boldsymbol{\eta},v,\boldsymbol{\phi}|\!|\!|^2=\|\, e_h(\boldsymbol{\eta})\|_{0,h}^2+t^2\|\boldsymbol{\phi}\|_{0,h}^2+\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})+\mathcal{J}(v,v)+\sum_{E\in\mathcal{E}}\frac{h_E}{\sigma_1}\,\|\{\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\eta})\}\|_E^2\,;$$

para todo $(\boldsymbol{\eta},v,\boldsymbol{\phi})\in H^{1+\kappa}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)\times H^1(\mathcal{T})\times L^2(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$.

O método de Galerkin descontínuo com superpenalização fraca (dGWOPIP - *weakly over–penalized interior penalty associated with the discontinuous Galerkin method*) para o modelo Reissner–Mindlin é: Encontre $(\boldsymbol{\theta}_h,\ w_h,\boldsymbol{\gamma}_h)\in\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)\times\mathcal{P}_k(\mathcal{T})\times\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\mathcal{A}_h(\boldsymbol{\theta}_h,w_h,\boldsymbol{\gamma}_h;\boldsymbol{\eta},v,\boldsymbol{\phi})=(g,v)_\Omega+(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta})_\Omega\quad\forall\ (\boldsymbol{\eta},v,\boldsymbol{\phi})\in\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)\times\mathcal{P}_k(\mathcal{T})\times\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2).\tag{3}$$

Esta formulação difere das apresentadas em [2] e [1] no seguinte: a) a formulação dGWOPIP não contém os termos $\langle\{\boldsymbol{\gamma}_h\},[v]\rangle_{\mathcal{E}}$ e $\langle\{\boldsymbol{\phi}\},[w_h]\rangle_{\mathcal{E}}$, como as de [2] e [1] ; b) a formulação dGWOPIP não necessita redução de integração (*reduced integration*) enquanto que em [2] isto é necessário; c) a formulação dGWOPIP superpenaliza o salto do deslocamento (mesmo para $k = 2$ a penalização é diferente); e d) a formulação dGWOPIP emprega a projeção do salto do deslocamento enquanto que em [1] a projeção não é usada.

2 Estimativas Residuais

Como em [1], assumimos que $\boldsymbol{\gamma}$ tem uma decomposição de Helmholtz na forma

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla}\, \alpha + \mathrm{Curl}(\beta) \quad \text{com } \alpha \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ e } \beta \in H^k(\Omega)/\mathbb{R}, \tag{4}$$

e que

$$\|\alpha\|_{k,\Omega} + \|\beta\|_{k,\Omega} \lesssim \|\boldsymbol{\gamma}\|_{k-1,\Omega}, \quad \text{e } \|\alpha\|_{k,\Omega} + \|\beta\|_{k-1,\Omega} \lesssim \|\boldsymbol{\gamma}\|_{H^{k-2}(\mathrm{div})}. \tag{5}$$

Em que $H^{k-2}(\mathrm{div})$ é o espaço formado pelos elementos de $H^{k-2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ que tem o divergente em $H^{k-2}(\Omega)$. Observamos que este resultado vale para $k = 2$ (pelo menos) se Ω é poligonal convexo e se temos H^k regularidade para o problema de Poisson $\Delta\alpha = \mathrm{div}(\boldsymbol{\gamma})$.

O próximo teorema apresenta várias estimativas residuais para algumas quantidades de interesse que serão necessárias na Seção 3, para demonstrar estimativas de erro *a priori*. De modo a obter estimativas residuais precisas, apresentamos no lema seguinte uma versão discreta da decomposição de Helmholtz. Esta decomposição consiste em dividir qualquer elemento $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ em duas partes, em que uma é o gradiente de $z \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$ e a outra é o curl de $r \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$. Para estabilizar essa divisão assumimos que $\|z\|_{1,h} + \|r\|_{1,h} \lesssim \|\boldsymbol{\phi}\|_{0,h}$. Outra versão discreta da decomposição de Helmholtz pode ser encontrada em [15, Lema 5.2].

Lema 1. *Qualquer elemento $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ pode ser escrito como $\boldsymbol{\nabla}_h\, z + \mathrm{Curl}_h(r)$ em que $z \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$, $r \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$ e $\mathrm{Curl}(r) = (\partial r/\partial y, -\partial r/\partial x)$.*

Claramente a decomposição do Lema 1 não é única, por exemplo, adicionando qualquer constante a z e/ou r o resultado continuará sendo uma solução. Explorando essa liberdade, vamos requerer para qualquer $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\nabla}_h\, z + \mathrm{Curl}_h(r) \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T},\mathbb{R}^2)$ que $\int_T z\, dx = \int_T \alpha\, dx$ e $\int_T r\, dx = \int_T \beta\, dx \;\; \forall\; T \in \mathcal{T}$, em que α e β são dados por (4).

Na sequência vamos aplicar o Lema 1 somente para um subespaço de $\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T},\mathbb{R}^2)$ que consiste de todos os elementos $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T},\mathbb{R}^2)$ tal que $l,\ r \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$, em que l e r são a contraparte de $\boldsymbol{\phi}$, isto é, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\nabla}\, l + \mathrm{Curl}(r)$. Usando este subespaço os resultados dos Teoremas 2 e 4 tornam-se mais claros, e a demonstração da estimativa de erro para a solução do dGWOPIP (Teorema 5) não é comprometida.

Observamos que a demonstração do próximo teorema é baseada nas ideias descritas em [13, Lema 2.2].

Teorema 2. *Seja $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ arbitrários mas tal que $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\nabla}\, z + \mathrm{Curl}(r)$ com $z, r \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \cap H^1(\Omega)$. Então, para $g_h \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$ e $\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ vale para todo $T \in \mathcal{T}$ e para todo $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ que*

$$\begin{aligned} h_T\|\boldsymbol{f}_h + \mathbf{div}_h\, \mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\phi}\|_T \lesssim{}& \|\, e(\boldsymbol{\theta}) - e_h(\boldsymbol{\eta})\|_T + \|\alpha - z\|_T + \|\beta - r\|_T + \\ &+ \|\boldsymbol{f}_T - \boldsymbol{f}_h\|_{H^{-1}(T)}, \end{aligned} \tag{6a}$$

$$h_T\|g_h - \mathrm{div}_h(\boldsymbol{\phi})\|_T \lesssim \|\, \boldsymbol{\nabla}(\alpha - z)\|_T + \|g_T - g_h\|_{H^{-1}(T)}, \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} h_E^{1/2}\|[\![\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\eta})]\!]\|_E \lesssim{}& \|\, e(\boldsymbol{\theta}) - e_h(\boldsymbol{\eta})\|_{\omega_E} + \|\alpha - z\|_{\omega_E} + \|\beta - r\|_{\omega_E} + \\ &+ \|\boldsymbol{f}_E - \boldsymbol{f}_h\|_{H^{-1}(\omega_E)}, \end{aligned} \tag{6c}$$

$$h_E^{1/2}\|[\boldsymbol{\phi}]\|_E \lesssim \|\, \boldsymbol{\nabla}(\alpha - z)\|_{\omega_E} + \|g_E - g_h\|_{H^{-1}(\omega_E)}. \tag{6d}$$

Aqui e no decorrer deste artigo, $g_T = g_{|T}$, $g_E = g_{|\omega_E}$ (idem para $\boldsymbol{f}$) e $\omega_E = T_i \cup T_j$ em que $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j = E$. Além disso, uma desigualdade $a \lesssim b$ substitui $a \leq Cb$ com uma constante multiplicativa C independente de t, h_T e h_E.

3 Análise de erro *a priori*

Nesta seção usamos as estimativas residuais para obter uma ótima estimativa de erro na norma energia. Inicialmente, lembramos algumas definições e resultados. Iniciamos com o seguinte lema que foi provado em [9].

Lema 3. *[9, Lema 2.2] Qualquer $v \in H^1(\mathcal{T})$ satisfaz*

$$\sum_{E\in\mathcal{E}} h_E^{-1} \|[v]\|_E^2 \lesssim \|v\|_h^2 := \sum_{T\in\mathcal{T}} \| \nabla_h v\|_T^2 + \sum_{E\in\mathcal{E}} \frac{\sigma_2}{h_E^{\rho}} \|\mathbf{\Pi}^{k-1}[v]\|_E^2$$

Consideramos o seguintes operadores de enriquecimento construídos usando técnicas de médias (veja [6] e [7] para detalhes): $\mathsf{E_h} : \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2) \cap H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h_E^{-2} \|\mathsf{E_h}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\|_T^2\right)^{1/2} + \| \nabla_h(\mathsf{E_h}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta})\|_\Omega \lesssim \|\boldsymbol{\eta}\|_h := \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \| e_h(\boldsymbol{\eta})\|_T^2 + \sum_{E\in\mathcal{E}} \frac{\sigma_1}{h_E} \|[\![\boldsymbol{\eta}]\!]\|_E^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

e $\mathsf{E_h} : \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \to \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h_E^{-2} \|\mathsf{E_h}v - v\|_T^2\right)^{1/2} + \| \nabla_h(\mathsf{E_h}v - v)\|_\Omega \lesssim \|v\|_h. \tag{8}$$

A desigualdade prévia (7) segue de propriedades do operador de enriquecimento e da desigualdade discreta de Korn (veja [8] e [2]), enquanto que (8) segue de propriedades do operador de enriquecimento e do Lema 3 (lembre que $\rho > 1$).

Lembramos agora das seguintes definições de oscilação para uma função escalar e para uma função vetorial

$$Osc(g) = \left(\sum_{E\in\mathcal{E}} \|g_E - Pg\|_{H^{-1}(\omega_E)}^2\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad Osc(\boldsymbol{f}) = \left(\sum_{E\in\mathcal{E}} \|\boldsymbol{f}_E - \mathbf{P}\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\omega_E)}^2\right)^{1/2},$$

em que $P : L^2(\Omega) \to \mathcal{P}_k(\mathcal{T})$ é a projeção ortogonal de L^2 em $\mathcal{P}_k(\mathcal{T})$, e $\mathbf{P} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ é a projeção ortogonal de L^2 em $\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$. Isto é,

$$\int_\Omega (Pg - g)v \, dx = 0 \quad \forall \; v \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \; \text{(análago para } \mathbf{P}\boldsymbol{f}\text{)}.$$

Como provado em [13], se $\boldsymbol{f} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ para $p > 1$ temos que

$$Osc(\boldsymbol{f}) \lesssim h^{1-2(1/2-1/q)} \|\boldsymbol{f} - \mathbf{P}\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \tag{9}$$

em que p e q são tais que $1/p + 1/q = 1$. De mesmo modo, é possível obter que

$$Osc(g) \lesssim h^{1-2(1/2-1/q)} \|g - Pg\|_{L^p(\Omega)} \tag{10}$$

se $g \in L^p(\Omega)$ para $p > 1$.

Teorema 4. *Seja $(\boldsymbol{\theta}, w, \boldsymbol{\gamma})$ a solução de (1) e seja $(\boldsymbol{\theta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h)$ a solução da formulação dGWOPIP (3). Assuma que a decomposição de Helmholtz (4) é válida. Então*

$$\begin{aligned}
\|\!|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h, w - w_h, \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h|\!\|^2 &\lesssim Osc^2(g) + Osc^2(\boldsymbol{f}) + h^{\rho-1}\|\boldsymbol{\gamma}\|_\Omega^2 + \\
+ \inf_{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)} &\left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\|\alpha - z\|_T^2 + \|\beta - r\|_T^2 + \| \nabla(\alpha - z)\|_T^2 + (h_T^{\rho-1} + t^2)\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\phi}\|_T^2 \right) \right\} \\
+ \inf_{\substack{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T};\mathbb{R}^2) \\ v \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T})}} &\Big\{ \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta}\|_h^2 + t^{-2}\|\boldsymbol{\theta} - \nabla w - (\boldsymbol{\eta} - \nabla_h v)\|_{0,h}^2 + \\
&+ \sum_{E\in\mathcal{E}} \frac{h_E}{\sigma_1} \|\{\mathcal{C}\, e_h(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta})\}\|_E^2 + \mathcal{J}(w - v, w - v) \Big\},
\end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\phi} = \nabla_h z + \mathrm{Curl}(r)$ com $z, r \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \cap H^1(\Omega)$.

Observamos que a demonstração deste resultado segue de dividir o erro em duas partes, em que uma está relacionada com o erro de interpolação e a outra está relacionada com o termo de consistência e com a não conformidade do método (como no segundo lema de Strang). Usando operadores de enriquecimento e estimativas residuais limitamos o erro relacionado ao termo de consistência e não conformidade por um fator similar a um erro de interpolação, mais um fator (os termos com o coeficiente $h^{\rho-1}$ no Teorema 4) que é controlado pela superpenalização. Para assegurar a convergência precisamos escolher ρ apropriadamente, isto significa superpenalizar o salto do deslocamento em (2). Com esta estratégia podemos provar uma ótima limitação de erro *a priori* (veja Teorema 5). A motivação em usar esta estratégia tem origem em [14, Lema 2.1], onde esta decomposição de erro é explícita. Infelizmente a análise aqui é mais complicada porque a condição N3 necessária para o [14, Lema 2.1] não foi estabelecida.

Novamente como em [1], seja $\alpha^I \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\beta^I \in \mathcal{P}_k(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)/\mathbb{R}$ os interpolantes de α e β, respectivamente, os quais satisfazem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|\alpha - \alpha^I\|_\Omega + h|\alpha - \alpha^I|_{1,\Omega} &\lesssim h^\ell |\alpha|_{\ell,\Omega} \qquad \ell = 1, \dots, k, \\ \|\beta - \beta^I\|_\Omega + h|\beta - \beta^I|_{1,\Omega} &\lesssim h^\ell |\beta|_{\ell,\Omega} \qquad \ell = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{11}$$

A escolha de $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^I = \boldsymbol{\nabla}\, \alpha^I + \operatorname{Curl}(\beta^I)$ prova com (5) que

$$\|\boldsymbol{\gamma} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^I\|_\Omega \lesssim h^{\ell-1}\left(|\alpha|_{\ell,\Omega} + |\beta|_{\ell,\Omega}\right) \lesssim h^{\ell-1}\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\ell-1,\Omega} \qquad \ell = 1, \dots, k. \tag{12}$$

Explorando o ínfimo no lado direito do Teorema 4 podemos provar o seguinte resultado de convergência.

Teorema 5. *Seja $(\boldsymbol{\theta}, w, \boldsymbol{\gamma})$ a soluação (1) e seja $(\boldsymbol{\theta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h)$ a solução da formulação dGWOPIP (3). Assuma que a solução $(\boldsymbol{\theta}, w, \boldsymbol{\gamma}) \in H^k(\Omega;\mathbb{R}^2) \times H^k(\Omega) \times H^{k-1}(\Omega;\mathbb{R}^2)$, $\boldsymbol{f} \in H^{k-2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ e $g \in H^{k-2}(\Omega)$ para $k \geq 2$. Além disso, assuma que a decomposição de Helmholtz (4) é válida. Então, se $\rho = 2k - 1$ temos a seguinte estimativa de erro*

$$\begin{aligned} |\!|\!|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h, w - w_h, \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h|\!|\!| \lesssim h^{k-1}\Big(\|\boldsymbol{\gamma}\|_{k-2,\Omega} + t\|\boldsymbol{\gamma}\|_{k-1,\Omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_\Omega + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{H^{k-2}(\mathrm{div})} + \|\boldsymbol{\theta}\|_{k,\Omega}\Big) + \\ h^{k-1}\left(\|\boldsymbol{f}\|_{k-2,\Omega} + \|g\|_{k-2,\Omega}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Observamos que para $k = 2$ a regularidade requerida para a solução de (1) é $\boldsymbol{\theta} \in H^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, $w \in H^2(\Omega)$ e $\boldsymbol{\gamma} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Esta regularidade sempre é válida se Ω é um domínio poligonal convexo ou um domínio limitado suave para $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Além disso, neste caso ($k = 2$), o lado direito, que é dependente da solução é: $t\|\boldsymbol{\gamma}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{H(\mathrm{div})} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_\Omega + \|\boldsymbol{\theta}\|_{2,\Omega}$, o qual permanece limitado quando t tende a zero.

Como este resultado foi obtido usando que a hipótese da decomposição de Helmholtz vale para $\boldsymbol{\gamma}$, nós ressaltamos que a decomposição de Helmholtz sempre é valida se Ω é um domínio poligonal convexo. Então, a estimativa (13) é valida para $k = 2$ (pelo menos).

Referências

[1] D. N. Arnold, F. Brezzi, R. S. Falk, and L. D. Marini. Locking-free Reissner-Mindlin elements without reduced integration. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40):3660–3671, 2007.

[2] D. N. Arnold, F. Brezzi, and L. D. Marini. A family of discontinuous Galerkin finite elements for the Reissner-Mindlin plate. *J. Sci. Comput.*, 22/23:25–45, 2005.

[3] D. N. Arnold and R. S. Falk. A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(6):1276–1290, 1989.

[4] D. N. Arnold and R. S. Falk. The boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(2):281–312, 1990.

[5] P. R. Bösing, A. L. Madureira, and I. Mozolevski. A new interior penalty discontinuous Galerkin method for the Reissner-Mindlin model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(8):1343–1361, 2010.

[6] S. C. Brenner. Two-level additive Schwarz preconditioners for nonconforming finite element methods. *Math. Comp.*, 65(215):897–921, 1996.

[7] S. C. Brenner. Convergence of nonconforming multigrid methods without full elliptic regularity. *Math. Comp.*, 68(225):25–53, 1999.

[8] S. C. Brenner. Korn's inequalities for piecewise H^1 vector fields. *Math. Comp.*, 73(247):1067–1087, 2004.

[9] S. C. Brenner, L. Owens, and L.-Y. Sung. Higher order weakly over-penalized symmetric interior penalty methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 236(11):2883–2894, 2012.

[10] C. Carstensen. Residual-based a posteriori error estimate for a nonconforming Reissner-Mindlin plate finite element. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6):2034–2044 (electronic), 2002.

[11] C. Carstensen and J. Hu. A posteriori error analysis for conforming MITC elements for Reissner-Mindlin plates. *Math. Comp.*, 77(262):611–632, 2008.

[12] C. Carstensen and J. Schöberl. Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reißner-Mindlin plate finite element method. *Numer. Math.*, 103(2):225–250, 2006.

[13] T. Gudi. Error analysis of discontinuous Galerkin methodsfor Stokes problem under minimal regularity. preprint.

[14] T. Gudi. A new error analysis for discontinuous finite element methods for linear elliptic problems. *Math. Comp.*, 79(272):2169–2189, 2010.

[15] J. Hu and Z.-C. Shi. Analysis for quadrilateral MITC elements for the Reissner-Mindlin plate problem. *Math. Comp.*, 78(266):673–711, 2009.

[16] C. Lovadina. A low-order nonconforming finite element for Reissner-Mindlin plates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(6):2688–2705 (electronic), 2005.

[17] C. Lovadina and R. Stenberg. A posteriori error analysis of the linked interpolation technique for plate bending problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(5):2227–2249 (electronic), 2005.

[18] I. Mozolevski and P. R. Bösing. Sharp expressions for the stabilization parameters in symmetric interior-penalty discontinuous Galerkin finite element approximations of fourth-order elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Math.*, 7(4):365–375, 2007.

[19] I. Mozolevski, E. Süli, and P. R. Bösing. hp-version a priori error analysis of interior penalty discontinuous Galerkin finite element approximations to the biharmonic equation. *J. Sci. Comput.*, 30(3):465–491, 2007.

[20] E. Süli and I. Mozolevski. hp-version interior penalty DGFEMs for the biharmonic equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(13-16):1851–1863, 2007.