Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

O Número de Ouro via Método de Newton-Raphson

Djerly Simonetti **Viviane Vanessa Dohl** **Suellen Ribeiro Pardo Garcia***
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR
85902-490, Campus Toledo, Toledo, PR
E-mail: adjsimonetti@gmail.com, viviane_dohl@hotmail.com, suellenpardo@yahoo.com.br

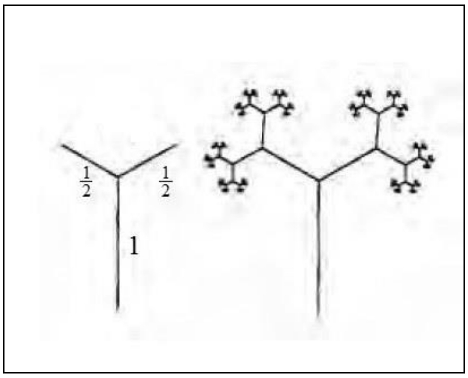
RESUMO

O presente trabalho trata de uma abordagem para encontrar uma equação cuja solução se aproxima do *número de ouro*, pautada na aplicação do método de *Newton-Raphson* (N-R). Especificamente, busca-se o único valor real positivo para a seguinte equação $x^2 - x - 1 = 0$. O encaminhamento para o estudo da aproximação, também se fez por meio do programa R, dado a precisão dos valores, sendo que a escolha do método de N-R deve-se a sua rápida convergência nesse caso.

O *número de ouro* representado pela letra grega Φ (phi), caracteriza-se pela sua autopropagação, ou seja, está presente em diversas áreas do conhecimento [5]. É um número irracional sendo convencional exibi-lo arredondado para três casas decimais: $\Phi = 1{,}618$.

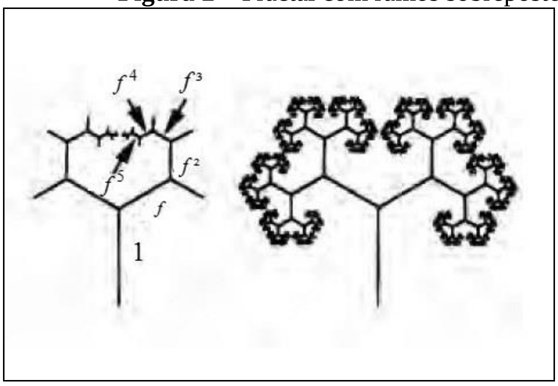
Uma das aplicações de Φ na geometria é na solução da equação, $f^2 + f - 1 = 0$, que é obtida do fractal Árvore Áurea. Muitos fractais da natureza possuem como característica principal a ramificação, assim como essa Árvore, alguns desses são obtidos considerando um processo de iteração na qual inicialmente tem-se um ramo de uma unidade de comprimento, donde se obtém dois novos ramos de comprimento $1/2$ com 120º, como na Figura 1. E assim aplicando esse fator de redução $1/2$ o processo continua indefinidamente.

Figura 1 – Fractal Árvore.



Fonte: Livio, 2002, p. 219.

Figura 2 – Fractal com ramos sobrepostos.



Em sistemas como o sistema circulatório de sangue, pode interessar saber qual o fator de redução que faz com que os ramos comecem a se sobrepor, como na Figura 2. Isto acontece para o fator de redução $\frac{1}{\Phi} = 0{,}618$. A condição para que dois ramos se toquem é que a soma de todos os comprimentos decrescentes dos ramos horizontais a partir de f^3 é igual ao componente horizontal do ramo de maior comprimento f.

Segue que $f\cos 30º = f^3\cos 30º + f^4\cos 30º + f^5\cos 30º + f^6\cos 30º + \ldots$.

Ou seja, $f = f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + \ldots$

* Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Toledo.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0072

Observa-se do lado direito da equação a soma de uma série geométrica infinita, logo $f=\frac{f^3}{1-f}\Rightarrow 1=\frac{f^2}{1-f}\Rightarrow 1-f=f^2$. A equação obtida, $f^2+f-1=0$, tem única solução real $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja, $1/\varphi$ [4].

Note como obter a equação $x^2-x-1=0$, cuja solução real positiva é Φ. Considere um segmento AB de medida *x* (unidade), estipulando um ponto C qualquer pertencente ao segmento AB obtemos dois novos segmentos AC e CB. O ponto C pode ocupar infinitas posições, contudo, só "existe uma única posição – posição de ouro – onde este ponto C divide o segmento AB em dois segmentos proporcionais, tal que o quociente entre as medidas do segmento todo pela parte maior é igual ao quociente entre as medidas da parte maior com a parte menor" [1].

Estipulando a medida de AC igual a a e a de CB igual a $x-a$, dado que AB mede *x*, a posição de ouro será obtida de

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{x-a}$$

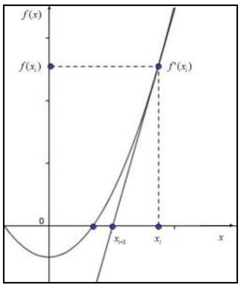
Assim, reescreve-se a equação obtida: $x(x-a)=a^2\Rightarrow x^2-ax-a^2=0$. Veja que a solução é $a\frac{(1\pm\sqrt{5})}{2}$, mas desconsidera-se a solução negativa. O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o valor de Φ, assim ao fazer *a=1* temos a equação a qual procuramos.

Nesse contexto, poderíamos determinar a raiz da equação $x^2-x-1=0$ por meio da fórmula de Bhaskara também, contudo, nosso objetivo é pautar-se em métodos mais avançados, e como essa equação é polinomial, será de fácil compreensão para o leitor acompanhar o desenvolvimento do método estipulado para o presente texto.

O método de *Newton-Raphson* (N-R) consiste em um processo iterativo para a determinação de raízes de funções não lineares [1]. Para utilização do método faz-se necessário analisar a função em questão e sua derivada em um determinado ponto, ou seja, se a função apresentar-se simples para derivar, esse método é apropriado.

Para sua aplicação é preciso admitir um chute inicial x_i para o valor da raiz procurada, determinando a reta tangente à função nesse ponto $[x_i, f(x_i)]$. Assim o ponto onde essa tangente cruzar o eixo das abcissas é uma estimativa da raiz – Figura 3.

Figura 3 – Descrição gráfica do método de N-R



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando a interpretação geométrica na Figura 3, pode-se escrever a seguinte equação $f'(x_i)=\dfrac{f(x_i)-0}{x_i-x_{i+1}}$. Reorganizando a mesma temos $x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, a qual é chamada de *fórmula de Newton-Raphson* [3].

Para que possamos aplicar o método, se faz necessário verificar a convergência do mesmo, para poder prosseguir com os cálculos. Para tanto, considere o teorema: seja $f\in[a,b]$. Se $x\in[a,b]$ tal que $f(x)=0$ e $f'(x)\neq 0$, então existe um $\delta>0$, tal que o método de N-R gera uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para x para qualquer aproximação inicial $x_0 \in [x-\delta, x+\delta]$ [1] [2]. Como a $f(x) = x^2 - x - 1$, a convergência está garantida.

O método de *Newton-Raphson* é também um método iterativo assim como a maioria dos métodos numéricos, para isso é necessário estipular um erro máximo que determinará o critério de parada das iterações a serem realizadas. O erro (ε) é dado calculando a f do valor encontrado na iteração, e esse valor deverá ser menor que o erro desejado para que se encerre o processo de iterações.

O chute inicial é dado de forma que a convergência seja mais rápida e pode ser dado com base no gráfico da equação, no entanto se o chute for muito distante da raiz, a quantidade de iterações será muito maior.

Na equação onde a solução é o *número de ouro* temos $f(x_i) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x_i) = 2x - 1$. Admitindo um erro de aproximação para essa raiz de $0{,}0000001$ e um chute inicial para x_i de 1,2 temos

$$x_{i+1} = 1{,}2 - \frac{(1{,}2)^2 - 1{,}2 - 1}{2(1{,}2) - 1} = 1{,}742857143$$

Calculando o erro (ε), obtemos $f(1{,}742857143) = 0{,}294693878$, o qual é maior do que o erro permitido, e portanto é necessário continuar com as iterações. Assim, admitimos 1,742857143 para x_i, para continuar as iterações. Resumidamente obtermos o seguinte:

Tabela 1: resultados das iterações

x_i	x_{i+1}	ε
1,2	1,742857143	0,294693878
1,742857143	1,624302135	0,014055290
1,624302135	1,618051462	0,000390710
1,618051462	1,618033989	0,0000000001

Portanto, a solução aproximada para a equação é 1,618033989. Em comparação, obtém-se a solução pelo *software* R, o qual apresenta como resultado 1,618034.

O método de *Newton Raphson* é eficiente para encontrar uma aproximação da raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Mediante a proposta apresentada, observa-se a convergência para o valor aproximado do *número de ouro*. Lembrando que, uma das características marcantes do método de N-R em relação a outros métodos numéricos é acelerar o processo de convergência, ou seja, menor número de iterações.

Palavras-chave*: Número de Ouro, método de Newton Raphson, Árvore Áurea*

Referências

[1] BIEMBENGUT, Maria Salett. e HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino.** – 3ª ed. – São Paulo: Contexto, 2003.

[2] BURDEN, Richard L. e FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica.** – 8ª ed. – São Paulo: Cengage Learning, 2008.

[3] CHAPRA, Steven C. e CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para engenharia.** – 5ª ed. – São Paulo, McGraw-Hill, 2008.

[4] LIVIO, Mario. **The Golden Ratio: the story of Phi, the world's most astonishing number.** New York: Broadway Books, 2002.

[5] STEWART, Ian, **Almanaque das curiosidades matemáticas**. – Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

[1] Para um maior aprofundamento da demonstração pode-se ler *Análise Numérica*, de Richard L. Burden e J. Douglas Faires, 2008.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0072