Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Solução do Problema de Pêndulo Oscilante com o Método das Diferenças Finitas

Gabrielle Piezzoti Oliveira* Adilandri Mércio Lobeiro
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR
80230-901, Campus Campo Mourão, Campo Mourão, PR
E-mail: gabrielle793@hotmail.com, alobeiro@utfpr.edu.br

Clicia Geovana Alves Pereira Juan Amadeo Soriano Palomino
Departamento de Ciências, UEM
87360-000, Campus Goioerê, Goioerê, PR
E-mail: cgapereira2@uem.br, jaspalomino@uem.br

RESUMO

Praticamente todos os engenheiros são confrontados por problemas relacionados ao movimento periódico de corpos livres. Um exemplo simples é um pêndulo oscilante, onde uma partícula de peso W está presa a uma haste sem peso, de comprimento l. Quando a partícula é solta, formando um ângulo inicial θ_0 com a vertical, oscila de um lado para o outro com período T [1]. As únicas forças agindo na partícula são a gravidade g e a tensão R na haste, como apresentado na Figura 1.

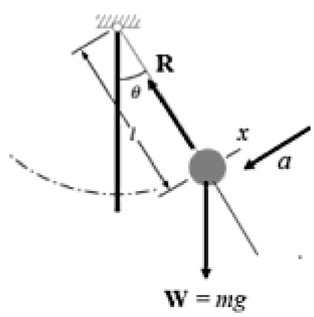

Figura 1: Pêndulo Oscilante

Ao aplicar as Leis de Movimento de Newton, deduz-se a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta \quad = \quad 0 \ , \tag{1}$$

em que θ é o ângulo de deslocamento do pêndulo [1]. Observa-se que a massa m não aparece na equação, pois o movimento de um pêndulo não depende de sua massa.

A equação (1) é uma EDO Não-Linear, pela presença do termo $\sin\theta$, o que impõe dificuldades para se obter sua solução analítica. Para pequenos deslocamentos angulares, no entanto, $\sin\theta$ é, aproximadamente, θ, sendo este expresso em radianos. Portanto, nesse caso, a equação (1) se torna linear e assume a forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta \quad = \quad 0 \ \cdot \tag{2}$$

*bolsista de Iniciação Científica PICME, CNPq/Capes

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0075

O objetivo deste trabalho é obter as soluções analítica e numérica de um Problema de Valor de Contorno (PVC) para um estudo de caso de um Pêndulo Oscilante. Para isso, considera-se $l = 0.6096$m, $g = 9.800665\text{m/s}^2$ e as condições de contorno $\theta(0) = \pi/8$ e $\theta(10) = \pi/8$.

Obtém-se então o PVC

$$\left| \begin{array}{ccc} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} & = & -\dfrac{g}{l}\theta \\ \theta(0) = \frac{\pi}{8} & \text{e} & \theta(10) = \frac{\pi}{8} \end{array} \right. , \tag{3}$$

cuja solução analítica é

$$\theta(t) = -\frac{1}{8}\left(\frac{\pi\left(\cos\left(\frac{\sqrt{402175607}}{500}\right)-1\right)\sin\left(\frac{\sqrt{402175607}x}{5000}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{402175607}}{500}\right)}\right)+\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\sqrt{402175607}x}{5000}\right). \tag{4}$$

Para a solução numérica, o algoritmo em MATLAB usado, que implementa o Método das Diferenças Finitas, é dado a seguir.

Código 1: Método de Diferenças Finitas - MATLAB

```
syms x

%w'' = p(x)w' + q(x)w + r(x), [a,b]
dados = inputdlg({'P: ', 'Q: ', 'R: ', 'n: '},'Dados');
limites = inputdlg({'a: ', 'f(a): ', 'b: ', 'f(b): '},'PVC');
passo = (str2num(limites{3}) - str2num(limites{1}))/str2num(dados{4});
xVector = str2num(limites{1}) : passo : str2num(limites{3});

%Sistema matricial: Aw = d. Obtendo a matriz tridiagonal A:
a(1) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(2)); %diagonal principal
b(1) = -1 + (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(2)); %diagonal superior
d(1) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(2)) + ((1 + (passo/2)*subs(
   dados{1},x,xVector(2)))*str2num(limites{2}));
for i = 2: length(xVector)-3
    a(i) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(i+1));
    b(i) = -1 + (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+1));
    c(i) = -1 - (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+1)); %inferior
    d(i) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(i+1));
end
a(i+1) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(i+2));
c(i+1) = -1 - (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+2));
d(i+1) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(i+2)) + ((1 - (passo/2)*subs
   (dados{1},x,xVector(i+2)))*str2num(limites{4}));

%Fatoração LU
l(1) = a(1);
u(1) = b(1)/a(1);
z(1) = d(1)/l(1);
for i = 2: length(xVector)-3
    l(i) = a(i) - (c(i)*u(i-1));
    u(i) = b(i)/l(i);
    z(i) = (d(i) - (c(i)*z(i-1)))/l(i);
end
l(i+1) = a(i+1) - (c(i+1)*u(i));
z(i+1) = (d(i+1) - (c(i+1)*z(i)))/l(i+1);

%Resolvendo o sistema
w(1) = str2num(limites{2});
w(length(xVector)) = str2num(limites{4});
w(length(xVector)-1) = z(length(xVector)-2);

for i = length(xVector)-2: -1 : 2
    w(i) = z(i-1) - (u(i-1)*w(i+1));
end
```


A ideia do Método é substituir as derivadas da EDO pelas fórmulas de Diferenças Centradas. O intervalo trabalhado é discretizado, no caso, para $[0, 10]$ foi usado passo $h = 0.01$, formando um sistema de equações de ordem 999×999 para as aproximações θ_i em cada um dos pontos. O algoritmo gera esse sistema, cuja matriz de coeficientes é tridiagonal e, para sua resolução, aplica Fatoração LU [2].

A Figura 2 apresenta os gráficos de ambas as soluções.

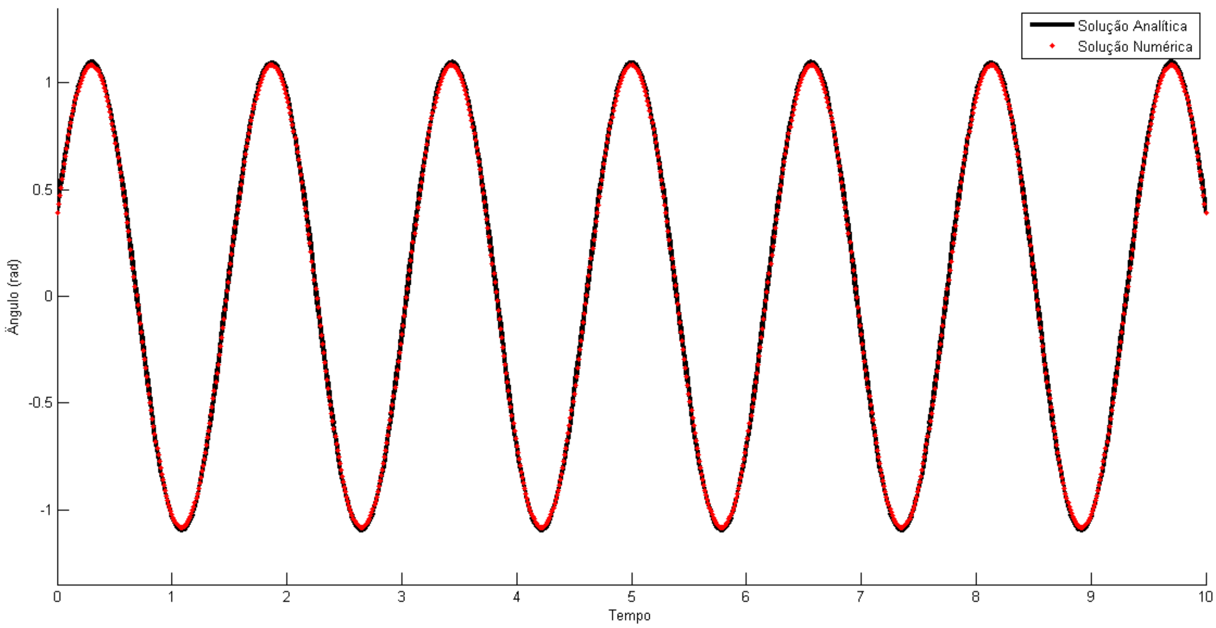

Figura 2: Soluções Gráficas

Com as soluções gráficas fica claro a proximidade entre os valores numéricos e os analíticos. A Tabela 1 apresenta uma comparação mais clara para alguns dos pontos calculados.

Tabela 1: Resultados e Erro

i	x_i	θ_i	$\theta(x_i)$	Erro absoluto
0	0	0.3926990817	0.3926990817	0
200	2	0.9313500208	0.9445509565	0.0132009357
400	4	-0.7001842363	-0.7081023307	0.0079180944
600	6	-0.7001842363	-0.7081023307	0.0079180944
800	8	0.9313500208	0.9445509565	0.0132009357
1000	10	0.3926990817	0.3926990817	0

O método provou sua eficiência, pois realmente aproximou a solução numérica à analítica.

Palavras-chave: *Equação Diferencial Ordinária, Solução Numérica, Diferenças Finitas, Pêndulo*

Referências

[1] P. Tipler, G. Mosca, Física para cientistas e engenheiros, Volume 6, (LTC) pp. 396, 409-411, São Paulo, 2009.

[2] R.L. Burden, J.D. Faires, Análise Numérica, *Cengage Learning*, 2008.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0075