

Aplicação da Técnica da Cadeia de Markov na Análise do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

Aristaili Barbara Baidek da Silva* **Fernanda dos Santos Garcia ***

Eliete Biasotto Hauser

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

Faculdade de Matemática

Av. Ipiranga 6681 - Porto Alegre – Brasil

E-mail: fernanda.garcia.002@acad.pucrs.br

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é estudar a teoria das Cadeias Finitas de Markov e aplicá-la na análise de dados disponibilizados pelo Ministério da Educação (MEC) para descrever o comportamento do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) relativo às séries iniciais do Ensino Fundamental dos municípios do estado do Rio Grande do Sul (RS).

Processos de Markov são usados para medir ou estimar mudanças de estados ao longo do tempo, como por exemplo, processos físicos, econômicos e biológicos. A fundamentação teórica exigiu estudar os teoremas da Álgebra Linear, ([1], [2], [3], [4] e [5]), e descrever o espectro da matriz de transição (determinação dos autovalores e autovetores).

Nesse estudo analisamos e classificamos as notas (N) do IDEB que as escolas de educação básica obtiveram em 2005 e 2011.

Nota (N)	2005	2011
$0 \leq N < 4$	290	15
$4 \leq N < 6$	524	764
$6 \leq N \leq 8$	1	123
Outros	446	359

Tabela 1: Quantidade de escolas classificadas por notas.

Considerando os dados da tabela 1 e os dados publicados em [6], verificamos que:

- das 290 escolas que em 2005 tinham nota entre 0 a 4, em 2011 15 permaneceram com estas notas e 275 evoluíram para notas de 4 a 6;
- das 524 escolas que em 2005 tinham notas entre 4 a 6, em 2011 402 permaneceram com estas notas e 122 evoluíram para nota de 6 a 8;
- de uma escola que em 2005 tinha nota entre 6 a 8, em 2011 esta permaneceu com esta nota;
- das 446 escolas que em 2005 não tinham nota, em 2011 359 permaneceram sem nota e 87 evoluíram para notas entre 4 a 6.

Na tabela 2, sintetizamos a análise realizada acima:

Nota(N)	$0 \leq N < 4$	$4 \leq N < 6$	$6 \leq N \leq 8$	Outros	Total
$0 \leq N < 4$	15	275	0	0	290
$4 \leq N < 6$	0	402	122	0	524
$6 \leq N \leq 8$	0	0	1	0	1
Outros	0	87	0	359	446

Tabela 2: Síntese da análise para o período de 2005 a 2011.

A partir da tabela 2, construímos a matriz de transição A:

* Bolsa de Iniciação Científica CAPES.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{15}{290} & \frac{275}{290} & \frac{0}{290} & \frac{0}{290} \\ \frac{0}{524} & \frac{402}{524} & \frac{122}{524} & \frac{0}{524} \\ \frac{0}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{0}{1} \\ \frac{0}{446} & \frac{88}{446} & \frac{0}{446} & \frac{359}{446} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05172 & 0.94828 & 0 & 0 \\ 0 & 0.76718 & 0.23282 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.19507 & 0 & 0.80493 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz A, são:

$$\lambda_1 = 0.0517; \lambda_2 = 0.8049; \lambda_3 = 0.7672; \lambda_4 = 1.$$

Então existe uma matriz de equilíbrio E tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = E.$$

Utilizando o software MATLAB, construímos a sequência $A^k, k = 2, 3, \dots$ e constatamos que $E = A^{54} = A^{55}$ é a matriz de equilíbrio:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.0027 & 0.7765 & 0.2208 & 0 \\ 0 & 0.5886 & 0.4114 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3067 & 0.0454 & 0.6479 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.5983 & 0.4016 & 0 \\ 0 & 0.4515 & 0.5485 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3617 & 0.1168 & 0.5215 \end{bmatrix}, \dots$$

$$A^{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 & 0 \end{bmatrix}, A^{54} = A^{55} = E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o objetivo de realizar estimativas futuras, utilizamos o sistema dinâmico discreto $X_{k+1} = X_k A, k = 0, 1, 2, \dots$, (o qual é equivalente a $X_k = X_0 A^k, k = 1, 2, 3, \dots$).

Assim, considerando:

$$X_0 = [290, 524, 1, 446].$$

obtemos:

$$X_1 = [14.9988, 764.0047, 122.9977, 358.9988],$$

$$X_2 = [0.7757, 670.3821, 300.8733, 288.9689],$$

⋮
⋮
⋮

$$X_{54} = [0, 0, 1261, 0].$$

X_1, X_2 e X_{54} representam estimativas das quantidades de escolas por notas para 2015, 2019 e 2335, conforme disposto na tabela 3.

Nota(N)	2015	2019	...	2335
$0 \leq N < 4$	14.9988	0.7757	...	0
$4 \leq N < 6$	764.0047	670.3821	...	0
$6 \leq N \leq 8$	122.9977	300.8733	...	1261
Outros	358.9988	288.9689	0

Tabela 3: Estimativas futuras da quantidade de escolas classificadas por notas.

Essas estimativas estão em desacordo com projeções futuras disponibilizadas pelo MEC o qual prevê a concentração do número de escolas nas classes $4 \leq N < 6$ e de $6 \leq N \leq 8$, e o aparecimento da classe $8 < N \leq 10$ no ano 2021.

Trata-se de um estudo em fase inicial, como sequência pretendemos refazê-lo considerando o período de transição de 2 em 2 anos e também realizar análise do IDEB das escolas participantes do Projeto ACERTA (Avaliação de Crianças Em Risco de Transtorno de Aprendizagem).

Palavras-Chave: *Cadeia de Markov; IDEB; Autovalores; Autovetores; Análise espectral.*

Referências

- [1] J. L. Boldrini, “Álgebra Linear”, HARPER & ROW DO BRASIL, São Paulo, 1980.
- [2] A. C. Chiang, K. Wainwright, “Matemática para economistas”, CAMPUS, Rio de Janeiro, 2006.
- [3] L. V. Fausett, “Applied Numerical Analysis Using Matlab”, PRENTICE HALL, New Jersey, 1999.
- [4] D. Poole, “Álgebra Linear”, THOMSON, São Paulo, 2004.
- [5] A. F. Sostisso, Autovalores na Análise de Modelos Matriciais Utilizando o Matlab, no “EREMAT”, EDIPUCRS, 2010.
- [6] Estatística do IDEB, Estados, Taxa de Aprovação, Prova Brasil, IDEB e Projeções (até a 4ª, 5ª a 8ª série e Ensino Médio) – Regiões Geográficas e Unidades da Federação – Ensino Fundamental Regular e Ensino Médio Regular.
<http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download> acesso em: 18/06/2013.