Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Análise do ponto de equilíbrio no modelo Lotka-Volterra

Angelo Fernando Fiori, **Luana Fransozi**,
Antonio Carlos Valdiero, **Luiz Antonio Rasia**
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias, Mestrado em Modelagem Matemática, UNIJUÍ - 98700-000, Ijuí, RS
E-mail: an@unochapeco.edu.br, luh.fransozi@hotmail.com

Resumo*: O objetivo do presente artigo é analisar o ponto de equilíbrio de um dos modelos clássicos de dinâmica populacional, o modelo de Lotka-Volterra, e verificar como ele se comporta em simulações a partir de dados hipotéticos. A modelagem matemática fornece ferramentas possíveis de transcrever, formular, solucionar e analisar fatos em modelos matemáticos. São explorados ainda alguns conceitos relacionados a sistemas não-lineares como plano de fase e ciclo limite. Para as simulações utilizou-se o software MATLAB®. Pelos resultados encontrados, conclui-se que o modelo, de modo geral, é instável. No entanto, nas proximidades do ponto de equilíbrio o sistema assume comportamento linear estável, descrevendo satisfatoriamente a relação entre as presas e os predadores.*

Introdução

A matemática sempre esteve associada a fenômenos da natureza, em especial, fenômenos físicos e biológicos o que permitiu o surgimento de uma nova interface de contato: a biomatemática. Para Meyer (2010, p. 3) a biomatemática nada mais é que o uso de instrumentos matemáticos para formular, estudar, analisar, entender e, em alguns casos, aproximar soluções de problemas da biologia, sendo a biologia entendida aqui como "fenômeno da vida". Com a biomatemática, uma grande área de estudo é a ecologia de populações abrangendo diversas interações entre elas a predação, a qual é o foco deste trabalho.

Para Santos (1989),

> "quando tratamos de um 'sistema presa predador', o processo compreende a sobrevivência de uma espécie que se alimenta de outra. A predação é a mais comum das interações entre espécies (p. 27)."

Existem diversos modelos que descrevem esta interação. Um dos mais conhecidos é o modelo Lotka-Volterra.

Assim, apresenta-se a seguir uma descrição do modelo Lotka-Volterra (clássico e em variáveis de estado), bem como seus pontos de equilíbrio. Tem-se como objetivo analisar os pontos onde é possível a coexistência entre espécies que estão sob relação de predação (presa-predador). Para isso, são utilizados dados hipotéticos, haja vista que em toda a literatura buscada não se encontrou dados que possibilitassem a simulação de uma situação real de predação.

Descrição do Modelo

O modelo Lotka-Volterra supõe que as espécies vivem em um meio homogêneo e as idades dos indivíduos não são consideradas. Admite-se ainda que o encontro das duas espécies seja ao acaso. Assim, quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores, mais alimento será necessário. É razoável supor que a taxa de destruição das presas deve ser proporcional ao número de encontros possíveis entre as duas espécies. A taxa de nascimento dos predadores depende, exclusivamente, neste modelo, da quantidade de presas devoradas em cada encontro. Dadas às hipóteses supracitadas, tem-se o modelo descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + \ dxy \end{cases} \tag{1}$$

onde x é o número de presas no instante t; y é o número de predadores no instante t; a é o coeficiente de crescimento das presas; c é o coeficiente de morte das presas por predador; b é o coeficiente de decréscimo de predadores; d é o coeficiente de predadores devido a existência de presas.

Para o sistema (1), descrito em variáveis de estado, cada condição inicial está associada a uma solução a qual pode ser representada geometricamente como uma curva (trajetória) em um plano de fase. “Os pontos que indicam como a dinâmica do sistema se comporta no plano de fase, são os pontos singulares ou pontos de equilíbrio” (MEZA, 2004,p. 138).

Os coeficientes c e d dependem, ao mesmo tempo, da população de presas e de predadores no instante t o que caracteriza um sistema não linear próprio, pois esta não linearidade é da natureza do sistema (SLOTINE; LI, 1991 p. 4). Dependendo das condições iniciais dadas os sistemas não lineares podem apresentar comportamento estável ou instável. Necessita-se, portanto, que o comportamento do sistema seja estável, ou seja, após um ligeiro deslocamento o sistema retorne a posição original. Em outras palavras, ao referir-se a estabilidade do sistema pretende-se utilizar as teorias

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0082

válidas em sistemas lineares para a região do ponto de equilíbrio, onde há característica de estabilidade (SLOTINE; LI, 1991 p. 5). Assim, os pontos de equilíbrio do sistema ocorrem quando a taxa de variação é nula. Para o modelo Lotka-Volterra admite-se dois pontos de equilíbrio (x_e, y_e): $(0,0)$ e $(b/d\,, a/c)$. Note que são levados em consideração apenas pontos de equilíbrio que se encontrem no primeiro quadrante.

Para a determinação dos parâmetros, bem como o estudo do comportamento dos pontos de equilíbrio do modelo, torna-se necessário o seguimento de uma metodologia que possibilite efetuar uma boa análise da coexistência de indivíduos em um meio.

Metodologia

Este trabalho busca relacionar os conteúdos estudados no componente curricular de Dinâmica de Sistemas Não-Lineares com a aplicação de modelos matemáticos nas mais diversas áreas. Deste modo, enquanto pesquisa bibliográfica, este artigo propiciou aprofundamento na área específica, fomentando discussões a partir de leituras de textos científicos.

Para isso, utilizou-se o software MATLAB® nas realização de simulações. Os dados utilizados são de natureza hipotética visto que, na bibliografia pesquisada, não foram encontrados os dados/parâmetros necessários para as simulações.

Escolheu-se parâmetros adequados para a, b, c e d de modo a constituir pontos de equilíbrio naturais. A estimação das condições iniciais se dará a partir dos pontos de equilíbrio encontrados.

Resultados

A partir da estimativa dos parâmetros é possível avaliar o comportamento do modelo Lotka-Volterra. Para a simulação foram consideradas $a = 10$ (coef. cresc. das presas); $b = 15$ (coef. cresc. de predadores); $c = 0{,}02$ (coef. de morte de presas por predador) e $d = 0{,}02$ (coef. de cresc. de predadores devido a existência de presas). Para os parâmetros adotados, tem-se os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(x_e, y_e) = (15/0.02\,, 10/0.02) = (750{,}500).$$

Visto que o ponto de equilíbrio $(0{,}0)$ implica na extinção de ambas as espécies, são consideradas condições iniciais próximas ao ponto $(750, 500)$. Assim, para os dados escolhidos obtêm-se o seguinte resultado:

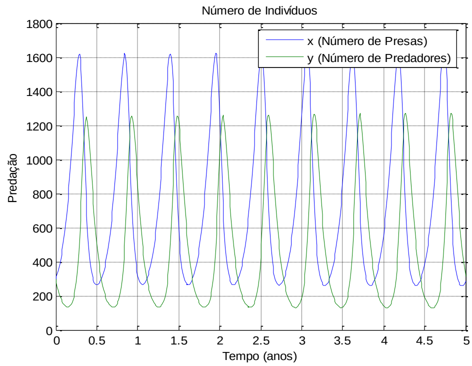

Figura 1: Dinâmica do comportamento para uma relação presa-predador

Na Figura 1, foram utilizados como condições iniciais 300 presas e 300 predadores. Como há uma distância considerável do ponto de equilíbrio, a variação do número de indivíduos é grande, o que mostra a instabilidade do sistema longe do ponto de equilíbrio.

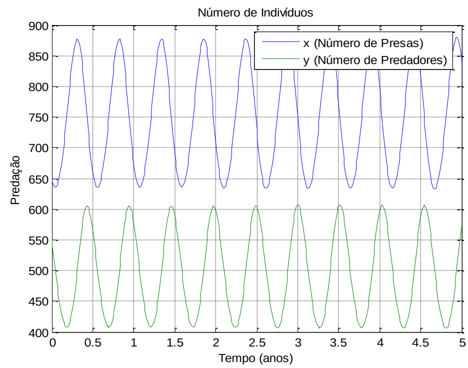

Figura 2: Dinâmica do comportamento para uma relação presa-predador

Na Figura 2, foram utilizados como condições iniciais 650 presas e 550 predadores. Como esta condição está próxima ao ponto de equilíbrio, a variação do número de indivíduos é baixa, o que mostra a estabilidade do sistema. Apesar de apresentar o mesmo comportamento do gráfico da Figura 1, neste sistema as populações não possuem o mesmo número de presas e predadores num instante de tempo. Além disso, na Figura 1, há uma flutuação mais intensa, ou seja, as populações aumentam e diminuem num intervalo de tempo menor do que na Figura 2.

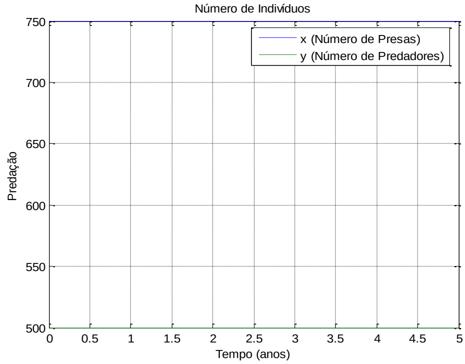

Figura 3: Dinâmica do comportamento para uma relação presa-predador

Ao considerar como condições iniciais as populações nos pontos de equilíbrio, conforme a Figura 3, nota-se que apesar da predação, a população se mantém estável.

Para analisar o modelo como um todo a partir de condições iniciais distintas, construiu-se o plano de fase. Os asteriscos vermelhos indicam a posição inicial das populações. As curvas em azul mostram a interação entre os indivíduos na relação de predação.

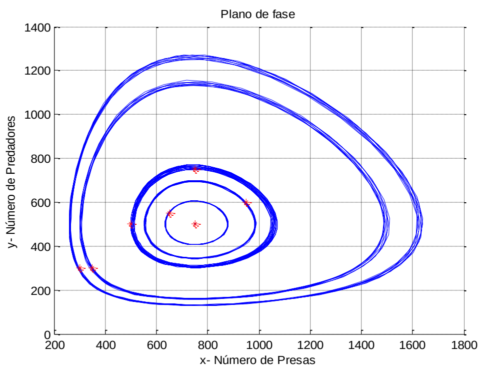

Figura 4: Ciclo limite do modelo

A Figura 4 mostra que o plano de fase se comporta através de um ciclo limite, isto é, uma curva fechada e isolada que indica a periodicidade do movimento e a natureza limitada do ciclo. O asterisco central é o ponto de equilíbrio e em relação a ele não há trajetórias do ciclo, o que indica a estabilidade do sistema nesta condição. Para as demais condições iniciais pode-se perceber o comportamento ao longo do tempo de uma população de presas frente a uma de predadores.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0082

Conclusão

As simulações apresentam o quanto as condições iniciais interferem no comportamento do modelo ao longo dos anos. Além disso, conhecer os pontos de equilíbrio auxilia a prever os pontos onde é possível a coexistência entre as espécies e a manutenção do ecossistema.

A relação de presas-predadores existe na natureza e é indispensável para o próprio controle natural. Se faz necessário, no entanto, que não haja extinção de espécies em decorrência deste fator. As condições iniciais que se encontram mais próximas ao ponto de equilíbrio, propiciam que as populações convivam por um maior período sem que ocorra uma brusca diminuição de presas ou predadores em um intervalo de tempo.

A modelagem matemática pode contribuir decisivamente para a tomada de decisões nas mais diversas áreas, em especial, na descrição e no controle de uma situação de predação. Em outras palavras, pode-se, através de modelos, estudar os fatores que podem contribuir para que o sistema volte ao equilíbrio ou mesmo desestabiliza-lo, em caso de necessidade.

Referências

MEZA, Magno Henrique Mendoza. Sistemas Não-Lineares do tipo Predador-Presa: projeto de controles via funções de Liapunov. 2004. 181 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Elétrica). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANTOS, Vinicius Machado Pereira dos. Sistema Presa-Predador Generalizado. 1989. 128 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Departamento de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. Universidade de Campinas, Campinas.

SEEMAT, 2., 2010, Vitória da Conquista. MEYER, João Frederico da Costa Azevedo. **Biomatemática.** Minicurso proferido na SEEMAT, Vitória da Conquista: UESB, 2010. Disponível em < http://www.uesb.br/eventos/seemat/anais/index_arquivos/mc_joni.pdf >. Acesso em: 21 set. 2011.

SLOTINE, Jean-Jacques E.; LI, Weiping. Applied Nonliear Control. Prentice Hall, Englewood Cliffis, New Jersey, 1991.

