Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Modelagem Matemática de Elementos Empregados em Suspensões Veiculares

Ana P. Brezolin, Márcia F. Brondani, Marnei D. Zorzella, Mauri J. Klein, Rodrigo Moreira, Scheila C. A. Willers
DECEEng/UNIJUÍ/ Campus Ijuí/ CEP 98700-000, Ijuí – RS, Brasil.
E-mail: anabresolin@hotmail.com

Antonio C. Valdiero
DECEEng/UNIJUÍ/ Campus Panambi/Caixa Postal 121/ CEP 98280-000, Panambi – RS, Brasil.
E-mail: valdiero@unijui.edu.br

Resumo: *Este artigo propõe a aplicação e investigação da modelagem matemática para as suspensões veiculares passivas, as quais consistem em um sistema massa-mola-amortecedor. A suspensão permite amenizar a transmissão das oscilações provenientes da ondulação do solo. Este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem de um quarto de uma suspensão automotiva. As equações dinâmicas do sistema foram analisadas e projetadas para que fossem possíveis as simulações, cujos resultados são apresentados neste trabalho. Com a utilização do software MATLAB simulou-se o comportamento do sistema de suspensão veicular. O modelo matemático da suspensão veicular representa um protótipo virtual, o qual contribui para o projeto e a análise do comportamento dinâmico antes da construção do protótipo real, propiciando-se assim economia de tempo e de custos no desenvolvimento da suspensão.*
Palavras-chave: *Equações diferenciais ordinárias; Suspensão passiva; Modelagem matemática; Simulação computacional.*

1 Introdução

O estudo sobre suspensões veiculares têm atraído a atenção de muitos pesquisadores, de forma a melhorar a dirigibilidade e ao mesmo tempo, minimizar o desconforto do passageiro e maximizar o atrito entre as rodas aumentando a estabilidade, onde a maior irregularidade causaria um solavanco desagradável transmitido ao motorista e, consequentemente, aos passageiros. Portanto, o propósito das suspensões veiculares é suportar adequadamente o chassi do veículo, manter o contato dos pneus com o solo. Silva et al. (2005), verificaram que a adição de componentes ativos nas suspensões veiculares melhoram substancialmente as características de dirigibilidade, desempenho e conforto.

Segundo Corrêa (2011) destaca que a suspensão ativa é uma tecnologia automotiva que controla os movimentos verticais provenientes das rodas através de um sistema eletrônico, sendo que ao contrário da suspensão comum – que trabalha de acordo com a rodagem – a suspensão ativa corrige as imperfeições da pista com mais eficiência dando maior estabilidade e desempenho ao veículo.

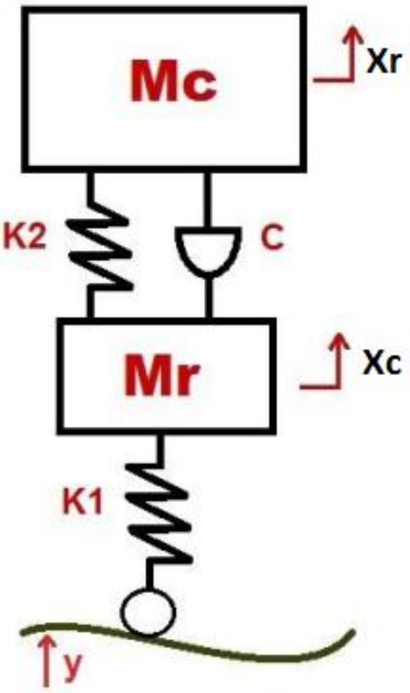
Picado (1998) observou que os atuadores nas suspensões ativas utilizam algum tipo de dispositivo eletro-hidráulico para aplicar a forma de controle, sendo os mais conhecidos como, banda-larga, em que o atuador é posicionado entre o corpo do veículo e o eixo, banda-curta, onde o atuador é posicionado em série com a mola de suspensão.

Neste trabalho buscou-se investigar os ambientes de modelagem matemática para compreender a suspensão veicular passiva.

2 Metodologia

Com a finalidade de desenvolver o modelo de um quarto da suspensão de um veículo, calcularam-se as equações diferenciais ordinárias de quarta ordem, linear homogênea descrita no movimento do sistema da equação (7). Posteriori a modelagem matemática, usou-se o programa computacional MATLAB, onde o software corroborou para a visualização gráfica da simulação entre a superfície da estrada com a mola atuante, a qual pode ser observada na Figura 1.

Figura 1 – Modelo de ¼ da suspensão veicular.



Fonte: Dos autores.

De acordo com a simbologia mostrada na Figura 1, os dados utilizados foram: Mc = 250 kg (massa da carroceria); Mr = 10 kg (massa da roda); K_1 = 1.800 N/m (rigidez do pneu); K_2 = 15.000 N/m (coeficiente de rigidez da mola da suspensão); C = 100 N.s/m (coeficimente de amortecimento da suspensão); X_1 (posição da roda); X_2 (posição da carroceria); y (função que define a variação vertical do perfil da estrada).

3 Descrição do problema

Para a análise matemática do problema deste trabalho, considera-se um modelo de sistema linear da suspensão de veículo correspondente a apenas um quarto do seu todo. O modelo consiste de uma massa suspensa que representa a carroceria do veículo, conectada a massa não suspensa que representa a roda do veículo em contato permanente com o chão, como mostrado na (Figura 1), onde a definição das variáveis na forma de parâmetros é exposta anteriormente.

Como mencionado previamente, a finalidade essencial dos sistemas de suspensão é reduzir ou até anular os movimentos das massas suspensas.

O modelo matemático para o comportamento das forças atuantes na massa da carroceria é descrito pelas equações (1), (2) e (3).

$$\sum F_{Mc} = Mc.\ddot{x_2} \tag{1}$$

$$K_2.x_c - K_2.x_r + C.\dot{x_1} - C.\dot{x_2} = Mc.\ddot{x_2} \tag{2}$$

$$Mc.\ddot{x_2} + C.\dot{x_2} - C.\dot{x_1} + K_2.x_r - K_2.x_c = 0 \tag{3}$$

O modelo matemático para o comportamento das forças atuantes na massa da roda foi descrito conforme as equações (4), (5) e (6).

$$\sum F_{Mr} = Mr.\ddot{x_1} \tag{4}$$

$$K_2.\mathrm{x_r} - K_2.x_c + C.\dot{x_2} - C.\dot{x_1} + K_1.y - K_1.x_c = Mr.\ddot{x_1} \tag{5}$$

$$Mc.\ddot{x_2} + C.\dot{x_1} - C.\dot{x_2} + (K_1 + K_2).x_c - K_2.x_r = K_1.y \tag{6}$$

O modelo também pode ser expresso na forma matricial, conforme na equação (7).

$$\begin{bmatrix} Mr & 0 \\ 0 & Mc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1.y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

O modelo pode ser escrito na forma de variáveis de estados, considerando-se $x_1 = x_r$, $x_2 = x_r$, $x_3=x_c$ e $x_4=x_c$, descrito nas equações (8):

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \dfrac{-(K_1 + K_2)x_1}{Mr} - \dfrac{C\,x_2}{Mr} + \dfrac{K_2\,x_3}{Mr} + \dfrac{C\,x_4}{Mr} + \dfrac{K_1}{Mr}y \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = \dfrac{K_2}{Mc}x_1 + \dfrac{C}{Mc}x_2 - \dfrac{K_2}{Mc}x_3 - \dfrac{C}{Mc}x_4 \end{cases} \tag{8}$$

Conforme descrito por Li e Slotine (1991), um sistema linear tem ponto de equilíbrio, se o determinante da matriz do sistema A for diferente de zero, onde esta matriz multiplica o vetor de variáveis de estados na equação (9):

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{Mr} & -\frac{C}{Mr} & \frac{K_2}{Mr} & \frac{C}{Mr} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{Mc} & \frac{C}{Mc} & -\frac{K_2}{Mc} & -\frac{C}{Mc} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{Xr}y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

O determinante da matriz do sistema que aparece na equação (9) é:

$$detA = 10.800$$

Li e Slotine (1991) acrescentam que para um sistema, o ponto de equilíbrio é estável se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem a parte real negativa, independente das condições iniciais, conforme a matriz dada:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1680-\lambda & -10-\lambda & 1500 & 10 \\ -\lambda & -\lambda & -\lambda & 1 \\ 60-\lambda & 0,4-\lambda & -60-\lambda & -0,4-\lambda \end{bmatrix} \tag{10}$$

Fazendo a analogia com a matriz descrita na equação (9) pode-se encontrar o determinante da matriz (10), corroborando assim para a visualização dos autovalores:

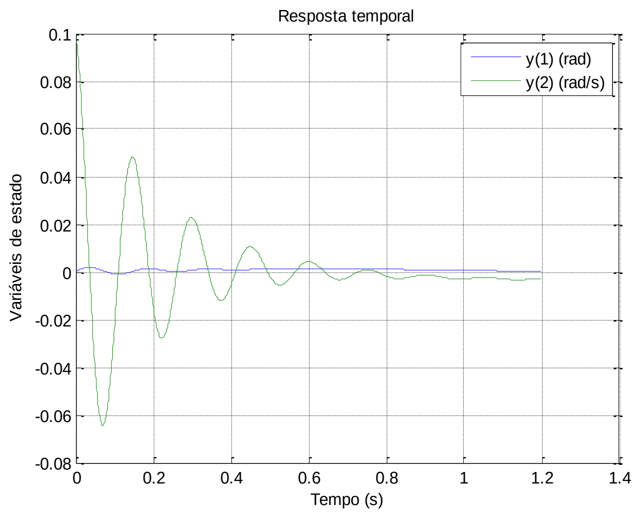
$$\lambda_1 = -1.5012 \quad \lambda_2 = -0.0024$$
$$\lambda_3 = -0.0001 + 0.0017i \quad \lambda_4 = -0.0001 - 0.0017i$$

4 Simulações e Resultados

Decorrido esta elaboração do modelo matemático, utilizou-se o software MATLAB, para desenvolver a simulação do comportamento da suspensão de um veículo.

Apresenta-se inicialmente o comportamento das massas da carroceria e da roda do sistema de suspensão veicular passivo quando esse sistema é perturbado por um obstáculo. Este comportamento é mostrado na (Figura 2). Em seguida, promove-se a simulação deste sistema.

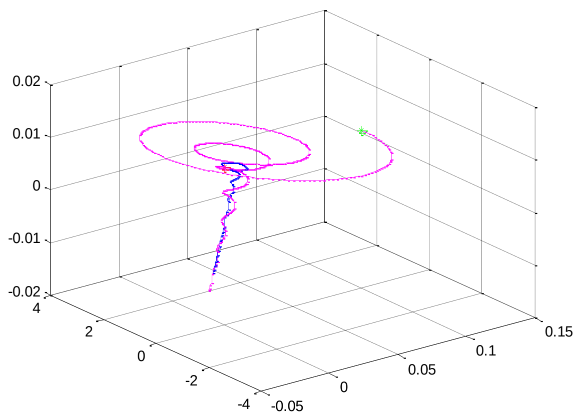
Figura 2 – Resultado do comportamento do movimento vertical da roda e da carroceria para um relevo da estrada descrito pela função y.



Fonte: Próprio autores.

Stutz (2005) conclui que nas suspensões as propriedades de amortecimento e rigidez podem ser controladas por um sinal de controle. Cita também que uma suspensão é baseada em um amortecedor de atrito, onde o mesmo acaba estabilizando-se, como é apresentada no plano de fase da (Figura 3 para uma entrada y):

Figura 3 – Resultado representado no plano de fase



Fonte: Dos autores.

5 Conclusão

Neste trabalho, buscou-se parâmetros para modelar um quarto da suspensão veicular passiva otimizada, com o objetivo de encontrar a combinação que atinja o melhor desempenho.

Com isso, comprova-se a complexidade do problema da modelagem matemática e conclui-se que as ferramentas do MATLAB utilizadas, corroboraram para a resolução da equação de quarta ordem linear.

Verificou-se que a otimização simultânea realizada pela forma matricial também comprovou a linearidade que era desejada.

Referências

[1] CORRÊA, Juliano L. **Comportamento dinâmico de um veículo implementado com suspensões ativas.** Dissertação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre – RS, 2011.

[2] PICADO, Ricardo M. **Controle semi - ativo em suspensões automotivas.** Dissertação – Universidade Estadual de Campinas Faculdade de engenharia Mecânica. Campinas - SP, 1998.

[3] SILVA, Willian Peterson da et al. **Modelagem e simulação de elementos empregados em suspensões veiculares ativas.** Revista ciências exatas, v. 11, n. 2, p. 23-29, 2005.

[4] SLOTINE, Jean-Jacques; LI, Weiping. **Applied nonlinear control.** New Jersey, 1991.

[5] STUTZ, Leonardo Tavares. **Síntese e análise de uma suspensão semi-ativa magneto reológica baseada na abordagem de controle com estrutura variável**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro, 2005.

