

Geometria esférica na Licenciatura em Matemática

Rudimar Luiz Nós¹
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR
Gabriel Plentz Motta²
SEB Dom Bosco, Curitiba, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho algumas características da geometria esférica e duas atividades que contextualizam essas características. Nas atividades, planejadas para o Curso de Licenciatura em Matemática, abordamos conceitos de cartografia usando o *Google Earth*. Concluímos que o *Google Earth* é uma ferramenta fantástica para ser explorada no ensino de geometria esférica.

Palavras-chave. Coordenadas Esféricas, Geodésicas, Triângulo Esférico, Cartografia, Google Earth.

1 Introdução

Vivemos sobre uma superfície quase-esférica. A geometria Euclidiana não é suficiente para explicar o nosso mundo, muito menos o universo que o cerca. Assim, o estudo de geometrias não Euclidianas, como a geometria esférica por exemplo, é um tema pertinente à formação do professor e precisa ser abordada nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Ainda, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) [14] estabelecem parâmetros para o ensino de geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Infelizmente, o mesmo não ocorre com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4].

Assim, abordamos neste trabalho a geometria esférica, propondo atividades que contextualizam algumas características dessa geometria, estas embasadas por teoremas demonstrados em [3, 12] e ilustradas em figuras tridimensionais construídas com o *CorelDRAW* [6], que pode ser substituído pelo *GeoGebra 3D* [9, 13, 15]. Nas atividades apresentadas, exploramos conceitos de cartografia usando o *Google Earth* [10]. Essas atividades foram planejadas para o Curso de Licenciatura em Matemática, mas no trabalho de pesquisa propomos também atividades de geometria esférica para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio [12].

2 Características da geometria esférica

A geometria esférica é uma particularidade da geometria elíptica, ambas desenvolvidas por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Segundo [3], a geometria esférica satisfaz o Postulado 2.1 (postulado elíptico das paralelas).

¹rudimarnos@utfpr.edu.br.

²gplentz97@gmail.com.

Postulado 2.1. *Dados uma reta r e um ponto P não pertencente à r , toda reta que passa por P intersecta r .*

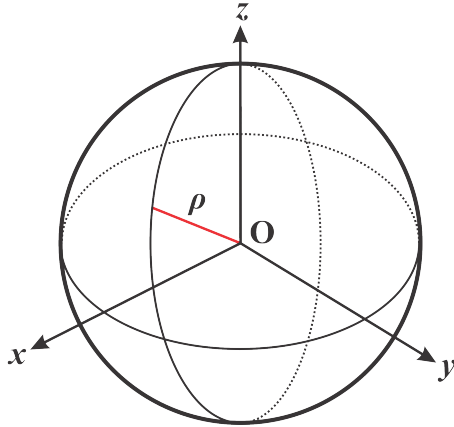


Figura 1: Superfície esférica de centro O e raio ρ [12].

A geometria esférica é a geometria definida sobre a superfície S_ρ^2 de uma esfera E_ρ^2 , de centro $O = (x_0, y_0, z_0)$ e raio ρ , ilustrada na Figura 1. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$, de abscissa x , ordenada y e cota z , pertence à superfície esférica S_ρ^2 se, e somente se,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2.$$

A reta esférica é uma circunferência máxima de S_ρ^2 [3]. Dessa forma, diferentemente da reta Euclidiana, que é infinita, a reta esférica tem comprimento finito. Duas retas esféricas, ou seja, duas circunferências máximas de S_ρ^2 , sempre se intersectam em dois pontos diametralmente opostos.

2.1 Coordenadas esféricas

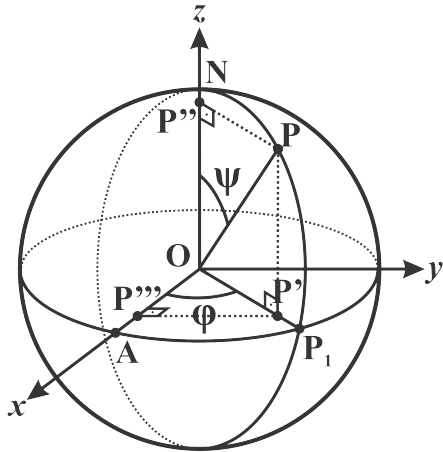


Figura 2: Coordenadas do ponto P , pertencente à S_ρ^2 , em função dos ângulos φ e ψ [12].

N .

Teorema 2.1. *Se $P = (x, y, z)$ é um ponto pertencente à S_ρ^2 , com $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \psi \leq \pi$, então as coordenadas esféricas de P são dadas por:*

$$P = \rho (\cos\varphi \sin\psi, \sin\varphi \sin\psi, \cos\psi). \tag{1}$$

2.2 Geodésicas

Uma geodésica de S^2_ρ é um arco de circunferência máxima (segmento de reta esférico). Mais especificamente, é o arco de circunferência máxima que minimiza a distância entre dois pontos pertencentes à superfície esférica [7]. A Figura 3 ilustra uma geodésica de S^2_ρ .

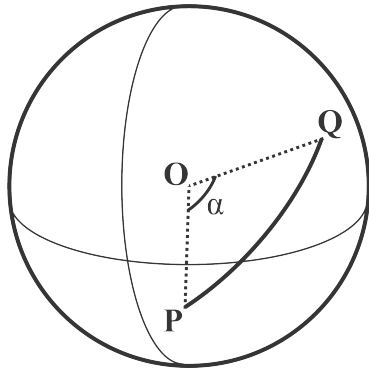


Figura 3: Uma geodésica de S^2_ρ : o arco PQ ou $d(P, Q)$ [12].

Dados dois pontos $P, Q \in S^2_\rho$ - Figura 3, o arco PQ é definido pelo ângulo $\widehat{POQ} = \alpha$, onde O é o centro de S^2_ρ e $0 < \alpha \leq \pi$. Dessa forma, o comprimento da geodésica \widehat{PQ} é a distância entre os pontos P e Q na superfície esférica.

Teorema 2.2. Se $P, Q \in S^2_\rho$ são dois pontos não diametralmente opostos, então existe uma única geodésica em S^2_ρ ligando P a Q .

Teorema 2.3. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ são dois pontos pertencentes a S^2_ρ e α é o ângulo central correspondente ao arco de circunferência máxima \widehat{PQ} , então a distância $d_{S^2_\rho}(P, Q)$ de P a Q é igual a

$$d_{S^2_\rho}(P, Q) = \rho\alpha = \rho \arccos \left(\frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\rho^2} \right). \tag{2}$$

2.3 Área do triângulo esférico

Na geometria Euclidiana, três pontos distintos não colineares definem um único triângulo; na superfície esférica, três pontos distintos, não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica e não diametralmente opostos dois a dois, definem oito triângulos esféricos, como ilustra a Figura 4(b). Em um triângulo esférico ABC - Figura 4(a): os pontos A, B e C são os vértices; as geodésicas $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ e \widehat{BC} são os lados e α, β e γ são os ângulos internos.

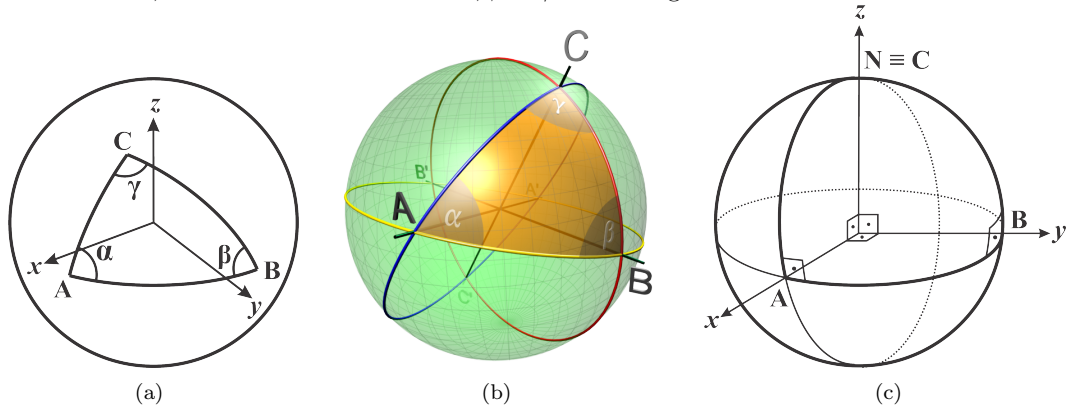


Figura 4: (a) Triângulo esférico ABC [12]; (b) triângulos esféricos definidos por três pontos distintos [16]; (c) triângulo esférico trirretângulo ABC [12].

Considerando os pontos $A = (\rho, 0, 0)$, $B = (0, \rho, 0)$ e $C = (0, 0, \rho)$, o triângulo esférico ABC tem área equivalente a um oitavo da superfície esférica - Figura 4(c). Mais, seus ângulos internos são todos retos, ou seja, iguais a $\frac{\pi}{2}$, pois os eixos Ox, Oy e Oz são ortogonais e cada uma das

geodésicas \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} está contida em um único plano que é ortogonal aos planos que contêm as outras duas. Este é um resultado interessante, visto que, diferentemente da geometria Euclidiana, o triângulo esférico ABC tem ângulos internos cuja soma é maior do que π .

Teorema 2.4. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos medem α , β e γ , então a área A de ABC é igual a*

$$A(\Delta ABC) = \rho^2 [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]. \tag{3}$$

A medida (3) é positiva. Essa medida pode ser reescrita como

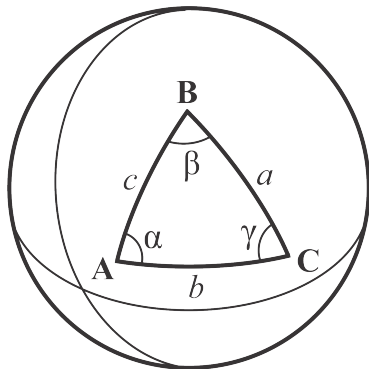
$$A(\Delta ABC) = \rho^2 E, \tag{4}$$

onde $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ é a *deficiência* (excesso) do triângulo esférico ABC , isto é, o quanto a soma dos ângulos internos de ABC excede π . A relação (4) viabiliza a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Teorema 2.5. *Se ABC é um triângulo esférico de ângulos internos α , β e γ , então a soma dos ângulos internos de ABC é dada por $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.*

2.4 Trigonometria esférica

Para calcular a área de um triângulo esférico pela relação (3), precisamos conhecer as medidas dos ângulos internos.



Uma vez conhecidas as medidas dos lados do triângulo esférico, a lei dos senos esférica e a lei dos cossenos esférica nos permitem calcular a medida dos ângulos internos.

Teorema 2.6. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então:*

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen} \left(\frac{a}{\rho} \right)} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen} \left(\frac{b}{\rho} \right)} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right)}.$$

Figura 5: Triângulo ABC em S_ρ^2 [12].

Teorema 2.7. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então:*

$$\cos \alpha = \frac{\cos \left(\frac{a}{\rho} \right) - \cos \left(\frac{b}{\rho} \right) \cos \left(\frac{c}{\rho} \right)}{\text{sen} \left(\frac{b}{\rho} \right) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right)}; \quad \cos \beta = \frac{\cos \left(\frac{b}{\rho} \right) - \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) \cos \left(\frac{c}{\rho} \right)}{\text{sen} \left(\frac{a}{\rho} \right) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right)}; \quad \cos \gamma = \frac{\cos \left(\frac{c}{\rho} \right) - \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) \cos \left(\frac{b}{\rho} \right)}{\text{sen} \left(\frac{a}{\rho} \right) \text{sen} \left(\frac{b}{\rho} \right)}.$$

A Figura 5 ilustra os lados e os ângulos internos do triângulo esférico ABC .

3 Atividades

Os textos de [1, 2, 8, 11] podem ser lidos e analisados antes da aplicação das atividades.

3.1 A cidade mais distante de Curitiba

Nesta atividade, relacionamos as coordenadas geográficas de um ponto na superfície terrestre às coordenadas esféricas desse ponto, e empregamos as coordenadas esféricas para calcular a distância entre as cidades de Curitiba, no Brasil, e de Uruma, no Japão. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de transformar coordenadas geográficas em coordenadas esféricas e de calcular o comprimento de uma geodésica.

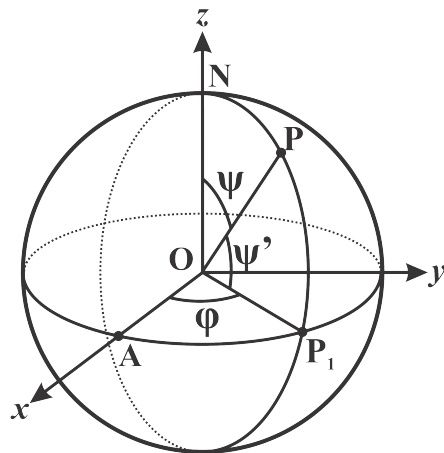


Figura 6: Colatitude ψ e longitude φ do ponto P na superfície esférica S^2_ρ [12].

A cidade mais próxima do ponto antípoda (lugar diametralmente oposto) a Curitiba na superfície terrestre é, segundo [5], a cidade de Uruma, no Japão. Conforme [17], as coordenadas geográficas de Uruma são:

$$26^\circ 22' 45'' N; \tag{5}$$

$$127^\circ 51' 27'' E. \tag{6}$$

A coordenada geográfica (5) é a latitude de Uruma, que está ao norte do equador; a coordenada (6), é a longitude de Uruma, que está a leste do meridiano de Greenwich. Em Cartografia, a latitude (N ou S) e a longitude (E ou W) de um ponto P são dadas, respectivamente, pelos ângulos $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$ e φ , onde ψ é a colatitude (ângulo complementar da latitude) de P . A Figura 6 ilustra os ângulos ψ e φ , os quais determinam, juntamente com a medida do raio da superfície esférica, as coordenadas esféricas do ponto P .

Empregando o Teorema 2.1 e $\rho = 6371\text{km}$ como medida do raio médio da Terra, os estudantes transformam as coordenadas geográficas de Curitiba e de Uruma, presentes na Tabela 1, em coordenadas esféricas. Em seguida, usando o Teorema 2.3, calculam a distância, em km, entre as cidades de Curitiba e Uruma. Para finalizar, os estudantes utilizam o *Google Earth* [10] para localizar na superfície terrestre Curitiba e Uruma, e comparam a distância entre as duas cidades fornecida pelo *Google Earth* com a distância previamente calculada.

Cidade	Latitude	Colatitude	Colatitude (rad)	Longitude	Longitude (rad)
Curitiba	$25^\circ 25' 47'' S$	$64^\circ 34' 13'' S$	1,117	$49^\circ 16' 19'' W$	0,8552
Uruma	$26^\circ 22' 45'' N$	$63^\circ 37' 15'' N$	1,0996	$127^\circ 51' 27'' E$	0,4712

Tabela 1: Coordenadas geográficas das cidades de Curitiba e de Uruma [10, 17].

3.2 O triângulo das Bermudas

Nesta atividade, empregamos as coordenadas esféricas para calcular a distância entre as três cidades que definem o triângulo das Bermudas e a área do triângulo esférico que tem por vértices essas três cidades. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de calcular o comprimento de uma geodésica e a área de um triângulo esférico.

O triângulo das Bermudas, ilustrado na Figura 7(a), talvez seja um dos assuntos mais icônicos em termos de eventos desastrosos para a aviação e a navegação, afinal diversos aviões, barcos e navios desapareceram de forma misteriosa ao trafegarem por sua área, determinada por Fort Lauderdale-EUA, San Juan-Porto Rico e Hamilton-Bermudas, como mostra a Figura 7(b).

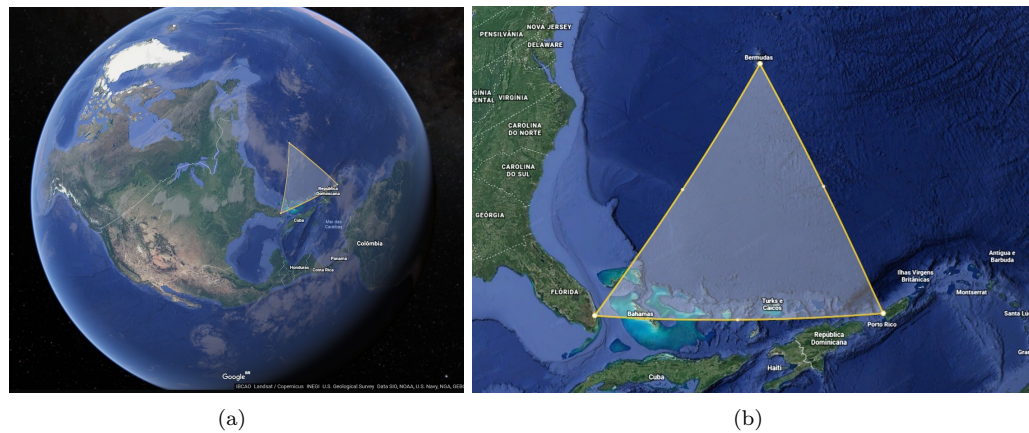


Figura 7: (a) Área do triângulo das Bermudas [10]; (b) vértices do triângulo das Bermudas [10].

Há explicações científicas para os desaparecimentos, tais como aquelas baseadas no campo magnético da região, eventos climáticos como terremotos e redemoinhos, correntes marítimas etc. Mas também há explicações sensacionalistas, baseadas em conspirações, e até mesmo sobrenaturais. Os mistérios do triângulo das Bermudas passaram a ser popularmente conhecidos através do livro *Invisible horizons: true mysteries of the sea*, do escritor sensacionalista americano Vincent Gaddis (1913-1997).

Utilizando o Teorema 2.1, $\rho = 6371km$ como medida do raio médio da Terra e os dados da Tabela 2, os estudantes transformam as coordenadas geográficas das cidades de Fort Lauderdale, San Juan e Hamilton em coordenadas esféricas; logo após, empregando o Teorema 2.3, calculam a distância, em km , entre cada uma das três cidades; em seguida, empregando os Teoremas 2.6 e 2.7, determinam as medidas dos ângulos internos do triângulo esférico cujos vértices são as três cidades. Para finalizar, usando o Teorema 2.4, os estudantes calculam a área, em km^2 , do triângulo das Bermudas, e comparam essa medida com a fornecida pelo Google Earth.

Local	Latitude	Colatitude (ψ)	Longitude (φ)
Fort Lauderdale	26 ^o 8'N	63 ^o 52'N	80 ^o 8'W
San Juan	18 ^o 28'N	71 ^o 32'N	66 ^o 4'W
Hamilton	32 ^o 18'N	57 ^o 42'N	64 ^o 47'W

Tabela 2: Coordenadas geográficas do triângulo das Bermudas [10].

4 Conclusões

Neste trabalho, discorremos sobre a geometria esférica, apresentando relações geométricas importantes, tais como a soma dos ângulos internos e a área de um triângulo esférico. Propomos ainda algumas atividades para explorar conceitos de geometria esférica no Curso de Licenciatura em Matemática.

Esperamos que este trabalho seja útil aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba, principalmente na disciplina de geometria espacial, que tem na ementa uma introdução às geometrias não Euclidianas, e também aos professores de matemática da Educação Básica.

Referências

- [1] Abrantes, W. G. B. Matemática, cartografia e navegação: uma história que deu certo, *Revista do Professor de Matemática*, n. 96, p. 56-62, 2018.
- [2] Alves, S. *A geometria do globo terrestre*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [3] Brannan, D. A., and Esplen, M. F., and Gray J. J. *Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [4] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. MEC/SEB/CNE, Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 dez. 2020.
- [5] City, F. *Farthest point from Curitiba, Brazil*. 2014. Disponível em: http://furthestcity.com/city.php?ID=CURITIBA_BRAZIL. Acesso em: 28 dez. 2020.
- [6] Corel. *CorelDRAW*. 2018. Disponível em: <https://www.coreldraw.com/br>. Acesso em: 28 dez. 2020.
- [7] Doria, C. M. *Geometrias: Euclidiana, esférica e hiperbólica*. 1. ed. SBM, Rio de Janeiro, 2019.
- [8] Filho, A. E. P. da S., Ferreira, F. D. e Braga, F. V. Revisitando a geometria esférica, *Revista do Professor de Matemática*, n. 95, p. 42-45, 2018.
- [9] GeoGebra3D. *GeoGebra 3D calculator*. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d>. Acesso em: 29 dez. 2020.
- [10] Google. *Google Earth*. 2020. Disponível em: <https://earth.google.com/web>. Acesso em: 28 dez. 2020.
- [11] Jahn, A. P. e Bongiovanni, V. Distância entre dois pontos na geometria esférica, *Revista do Professor de Matemática*, n. 91, p. 45-51, 2016.
- [12] Motta, G. P. *Geometrias não Euclidianas no plano e geometria esférica*. Monografia de Conclusão de Curso, UTFPR, Curitiba, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/11564>.
- [13] Nós, R. L. e Silva, V. M. R. da. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, p. 010364-1 - 010364-7, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2020.007.01.0364>.
- [14] Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática*. Governo do Paraná/SEED/DEB, Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1>. Acesso em: 29 dez. 2020.
- [15] Silva, V. M. R. da e Nós, R. L. *Calculando o volume de poliedros convexos*. CRV, Curitiba, 2018. DOI: <https://doi.org/10.24824/978854442681.4>.
- [16] Wikimedia Commons. *Spherical triangle*. 2020. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_triangle_3d.png. Acesso em: 28 dez. 2020.
- [17] Wikipedia. *Uruma*. 2020. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Uruma>. Acesso em: 28 dez. 2020.