Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um método do ponto proximal inexato para problemas de quase-equilíbrio

Edimilson Lopes Dias Júnior[1]
DM/UFPI, Teresina, PI
Pedro Jorge S. Santos [2]
UFDPar, Parnaíba, PI
João Carlos de Oliveira Souza[3]
DM/UFPI, Teresina, PI

Resumo. Neste trabalho, propomos uma versão inexata do método do ponto proximal para problemas de quase-equilíbrio (QEP) considerado em Santos e Souza [A proximal point method for quasi-equilibrium problems in Hilbert spaces, Optimization, 1-16, 2020]. Analisamos as propriedades do método proposto e provamos, sob hipóteses razoáveis, sua convergência para uma solução do problema. Por fim, um experimento numérico ilustra os resultados obtidos.

Palavras-chave. Problema de quase-equilíbrio, método do ponto proximal, problema de equilíbrio.

1 Introdução

Neste trabalho, estudaremos um método inexato para resolver problemas de quase-equilíbrio (QEP). Para isso, consideramos $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado e não-vazio. Denotaremos por $f : X \times X \to \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, ou seja, uma função que satisfaz $f(x, x) = 0$ para todo $x \in X$. Antes de definir o que será um problema de quase-equilíbrio, introduziremos alguns conceitos relacionados a problemas de equilíbrio (EP). Tais conceitos servirão de suporte para as definições e resultados que seguem. O problema de equilíbrio, denotado por $EP(f, X)$, consiste de encontrar um ponto $x^* \in X$ tal que

$$f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall\, y \in X. \tag{1}$$

O conjunto solução de $EP(f, X)$ será denotado por $S_{EP}(f, X)$. Ao $EP(f, X)$ podemos associar um novo problema, que consiste em encontrar $y^* \in X$ satisfazendo

$$f(x, y^*) \leq 0, \quad \forall\, x \in X.$$

Este problema é conhecido como o problema dual de $EP(f, X)$. Analogamente, seu conjunto solução será denotado por $S^d_{EP}(f, X)$. Os problemas de equilíbrio tem uma vasta aplicação em matemática, podendo ser utilizados para modelar as mais diversas situações, tais como problemas de otimização, desigualdades variacionais, complementaridade, otimização vetorial e teoria dos jogos não cooperativos. Veja por exemplo Blum e Oettli [1].

[1]edimilson.lopes@ufpi.edu.br
[2]pedrojorge@ufpi.edu.br
[3]joaocos.mat@ufpi.edu.br

Uma vez definido o problema de equilíbrio, passemos a um problema mais geral chamado de problema de quase-equilíbrio. Um problema de quase-equilíbrio, o qual denotaremos por $QEP(f, C)$, consiste de encontrar um ponto $x^* \in C(x^*)$ tal que

$$f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall\, y \in C(x^*), \tag{2}$$

onde $C : X \rightrightarrows X$ é uma aplicação ponto-conjunto que associa a cada ponto de X um subconjunto em X. Observe que, quando $C(x) \equiv X$, para todo $x \in X$, o problema de quase-equilíbrio retorna ao problema de equilíbrio (1). Denotaremos o conjunto solução do problema de quase-equilíbrio por $S_{QEP}(f, C)$. É bem conhecido que problemas tais como desigualdades quase variacionais, jogos de Nash generalizados e outros, não se encaixam na formatação de (1) e sim na formatação de quase-equilíbrio (2). Daí surge a necessidade de uma generalização do então problema de equilíbrio para o quase-equilíbrio. Veja, por exemplo, Santos e Souza [5] e suas referências.

Uma das técnicas mais empregadas para resolver um problema de equilíbrio é o método do ponto proximal que através de uma regularização resolve em cada iteração um novo problema de equilíbrio, chamado problema regularizado e denotado por $EP(f_k, X)$, onde a nova bifunção f_k nada mais é que a bifunção do problema original acrescida da regularização. Em nosso trabalho, propomos uma versão inexata do método do ponto proximal para problemas de quase-equilíbrio desenvolvido por Santos e Souza [5], no sentido de que a função regularização f_k^e dada por

$$f_k^e(x, y) = f(x, y) + \gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle - \langle e^k, y - x \rangle,$$

com $\{\gamma_k\} \subset \mathbb{R}$ uma sequência positiva e limitada, de certa forma, generaliza a regularização considerada em [5], uma vez que fazendo $e^k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, a bifunção regularizada considerada neste trabalho coincide com a proposta em [5]. Caso contrário, os subproblemas resolvidos pelo nosso método são inexatos o que dará maior flexibilidade ao método, principalmente do ponto de vista computacional.

Nosso trabalho se apresenta dividido da seguinte maneira: Na Seção 2 apresentaremos resultados preliminares relativos a EP e QEP. Na Seção 3 apresentaremos o algoritmo proposto e analisaremos suas propriedades de convergência. Por fim, na Seção 4 realizamos um experimento numérico para verificar a eficiência do método proposto. Finalizamos com algumas considerações finais na Seção 5.

2 Preliminares

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado. No decorrer desse trabalho assumiremos que a aplicação $f : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes hipóteses as quais são amplamente adotadas na literatura de problemas de equilíbrio e quase-equilíbrio.

(P1) $f(x, x) = 0$, para todo $x \in X$;

(P2) $f(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ é contínua em $X \times X$;

(P3) $f(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ é convexa, para todo $x \in X$;

(P4) f é monótona, i.e., $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ para quaisquer $x, y \in X$;

Proposição 2.1. *Considere $f : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo (P1)-(P4). Fixe $\bar{x}$, $e \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma > 0$. Seja $f^e : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f^e(x, y) = f(x, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle - \langle e, y - x \rangle,$$

então $EP(f^e, X)$ tem solução única.

Demonstração. Veja [2, Proposição 3.1]. □

A seguir apresentamos a definição de M-continuidade (ou continuidade no sentido de Mosco); veja Mosco [3]. Esse conceito será usado nos resultados referentes à análise de convergência do método.

Definição 2.1. *Dizemos que uma aplicação $C : X \rightrightarrows X$ é M-contínua se:*

(i) Dados $\{x^k\}, \{y^k\} \subset X$, com $y^k \in C(x^k)$, $x^k \to x$ e $y^k \to y$, então $y \in C(x)$;

(ii) Para qualquer sequência $\{x^k\} \subset X$, tal que $x^k \to x$, e para todo $y \in C(x)$, existe uma sequência $\{y^k\} \subset X$ tal que $y^k \in C(x^k)$ e $y^k \to y$.

3 Método do ponto proximal inexato

Nesta seção, definimos uma versão inexata do método ponto proximal (MPP) para problemas de quase-equilíbrio proposto por Santos e Souza [5] propiciando ao método maior aplicabilidade e flexibilidade, principalmente do ponto de vista computacional. Dessa forma, iremos supor que f satisfaz (P1)-(P4) e que C é M-contínua.

MPP inexato
Passo 1: Tome uma sequência limitada de escalares positivos $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e escolha $x^0 \in X$;
Passo 2: Dado x^k, calcule $x^{k+1} \in S_{EP}(f_k^{e^k}, C(x^k))$, onde

$$f_k^{e^k}(x, y) = f(x, y) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle - \langle e^k, y - x\rangle, \tag{3}$$

com

$$\|e^k\| \leq \|x^{k+1} - x^k\|. \tag{4}$$

Passo 3: Se $x^{k+1} = x^k$, pare e retorne x^k. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e retorne ao **Passo 2.**

Observação 3.1. *Note que em cada subproblema do método resolvemos um problema de equilíbrio visto que o conjunto $C_k := C(x^k)$ está fixo, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, sob as hipóteses (P1)-(P4), o problema de encontrar $x^{k+1} \in S_{EP}(f_k^{e^k}, C_k)$ tem solução única e com isso o método está bem definido; veja Proposição 2.1.*

Uma vez bem definido o algoritmo, estudaremos algumas de suas propriedades de convergência. Para isso, iniciamos com o seguinte resultado que diz respeito ao critério de parada do método.

Proposição 3.1. *Se $x^{k+1} = x^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então x^k é solução do QEP.*

Demonstração. Pela definição do algoritmo, temos que $x^{k+1} \in S_{EP}(f_k^{e^k}, C_k)$. Assim, temos que $x^{k+1} \in C_k$ e $f_k^{e^k}(x^{k+1}, y) \geq 0$, para todo $y \in C_k$. Portanto,

$$f(x^{k+1}, y) + \gamma_k\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle - \langle e^k, y - x^{k+1}\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C_k. \tag{5}$$

Sendo $x^{k+1} = x^k$, segue de (4) que $e^k = 0$ e, além disso, $\gamma_k\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle = 0$. Assim, obtemos de (5) que $f(x^{k+1}, y) \geq 0$, para todo $y \in C(x^k)$. Logo, obtemos que $x^k \in C(x^k)$ e $f(x^k, y) \geq 0$ para todo $y \in C(x^k)$. Portanto, $x^k \in S_{QEP}(f, C)$ e a prova da proposição está completa. □

Em virtude da proposição anterior, iremos supor que o algoritmo gera uma sequência $\{x^k\}$ infinita. Uma propriedade clássica e desejável, se tratando de método do ponto proximal, é conhecida como convergência assintótica. Neste trabalho, iremos supor que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo MPP Inexato satisfaz tal propriedade, definida abaixo, que iremos chamar de (H1).

(H1) Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo algoritmo, então

$$\lim_{k\to+\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Teorema 3.1. *Todo ponto de acumulação de* $\{x^k\}$ *pertence a* $S_{QEP}(f, C)$

Demonstração. Seja $\widehat{x}$ um ponto de acumulação qualquer de $\{x^k\}$ e considere $\{x^{k_j}\}$ uma subsequência de $\{x^k\}$ que converge para $\widehat{x}$. Da definição do algoritmo, temos que $x^{k_{j+1}} \in C(x^{k_j})$. De (H1) temos que $x^{k_{j+1}} \to \widehat{x}$. Logo, da M-Continuidade de C, temos que $\widehat{x} \in C(\widehat{x})$. Novamente pela M-continuidade de C, temos que, dado $y \in C(\widehat{x})$ arbitrário, existe uma sequência $\{y^{k_j}\}$ tal que $y^{k_j} \to y$ e $y^{k_j} \in C(x^{k_j})$. Agora, como $x^{k_{j+1}} \in S_{EP}(f^{e^{k_j}}_{k_j}, C_{k_j})$ temos

$$f^{e^{k_j}}_{k_j}(x^{k_{j+1}}, z) \geq 0, \quad \forall z \in C(x^{k_j}).$$

O que significa que

$$f(x^{k_{j+1}}, z) + \gamma_{k_j}\langle x^{k_{j+1}} - x^{k_j}, z - x^{k_{j+1}}\rangle - \langle e^{k_j}, z - x^{k_{j+1}}\rangle \geq 0, \quad \forall\ z \in C(x^{k_j}).$$

Em particular, para $z = y^{k_j}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x^{k_{j+1}}, y^{k_j}) + \gamma_{k_j}\langle x^{k_{j+1}} - x^{k_j}, y^{k_j} - x^{k_{j+1}}\rangle - \langle e^{k_j}, y^{k_j} - x^{k_{j+1}}\rangle \\ &\leq f(x^{k_{j+1}}, y^{k_j}) + \gamma_{k_j}\ \|x^{k_{j+1}} - x^{k_j}\|\ \|y^{k_j} - x^{k_{j+1}}\| + \|e^{k_j}\|\ \|x^{k_{j+1}} - y^{k_j}\|. \end{aligned} \tag{6}$$

Usando o fato de que $\{\gamma_{k_j}\}, \{y^{k_j}\}$ e $\{x^{k_j}\}$ são limitadas e que (H1) fornece $\lim\limits_{j\to+\infty} \|x^{k_{j+1}} - x^{k_j}\| = 0$, e consequentemente de (4) segue que $\lim\limits_{j\to+\infty} \|e^{k_j}\| = 0$. Tomando o limite com $j \to +\infty$ em (6) e levando em conta que $\{\|y^{k_j} - x^{k_{j+1}}\|\}$ é limitada, segue de (P2) que

$$f(\widehat{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in C(\widehat{x}),$$

obtendo que $\widehat{x} \in S_{QEP}(f, C)$. □

O resultado seguinte fornece uma caracterização para que um ponto x^* seja solução de um problema de quase-equilíbrio. Usaremos esse resultado para obter, nos experimentos numéricos, uma precisão do ponto limite obtido pelo método. Esse resultado foi provado em Santos e Souza [5] e, a seguir, apresentamos sua prova por questão de completeza do trabalho.

Seja $f : X \times X \to \mathbb{R}$ uma bifunção. Denotaremos por $\partial_2 f$ o subdiferencial (no sentido clássico de análise convexa) de f com respeito a segunda variável. Uma vez que valem (P1) e (P3) temos

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, x) &= \{v \in H : f(x, y) \geq f(x, x) + \langle v, y - x\rangle\} \\ &= \{v \in H : f(x, y) \geq \langle v, y - x\rangle\}. \end{aligned}$$

Dado $x \in X$, denotamos por $\Upsilon(x) = \|x - \arg\min_{y\in C(x)}\{f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\}\|$.

Proposição 3.2. *Um ponto* $x^* \in S_{QEP}(f, C)$ *se, somente se,* $\Upsilon(x^*) = 0$

Demonstração. Suponha que $x^* \in S_{QEP}(f, C)$. Então, $x^* \in C(x^*)$ e

$$f(x^*, y) + \frac{1}{2}\|y - x^*\|^2 \geq f(x^*, y) \geq 0.$$

Agora note que $0 = f(x^*, x^*) + \frac{1}{2}\|x^* - x^*\|^2$, isso nos diz que

$$x^* = \arg\min_{y \in C(x^*)} \{f(x^*, y) + \frac{1}{2}\|y - x^*\|^2\}$$

e com isso, obtemos que $\Upsilon(x^*) = 0$.

Agora, se $x^* = \arg\min_{y \in C(x^*)}\{f(x^*, y) + \frac{1}{2}\|y - x^*\|^2\}$, temos, da condição de otimalidade de primeira ordem, que $0 \in \partial_2 f(x^*, x^*) + N_{C(x^*)}(x^*)$. Assim, temos que existe $s^* \in \partial_2 f(x^*, x^*)$ tal que $0 \in s^* + N_{C(x^*)}(x^*)$. O que por sua vez implica que $-s^* \in N_{C(x^*)}(x^*)$. Da definição de cone normal, temos $\langle y - x^*, -s^*\rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in C(x^*)$. Consequentemente, obtemos que

$$\langle y - x^*, s^*\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C(x^*). \tag{7}$$

Por outro lado, $s^* \in \partial_2 f(x^*, x^*)$ e, de (P3), temos que $f(x^*, \cdot)$ é convexa, logo

$$f(x^*, y) \geq f(x^*, x^*) + \langle s^*, y - x^*\rangle = \langle s^*, y - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in C(x^*),$$

onde a última desigualdade segue usando, de (P1), o fato que $f(x^*, x^*) = 0$ e (7). Portanto, temos que $x^* \in S_{QEP}(f, C)$. □

4 Ilustração Numérica

Nesta seção ilustramos numericamente o método proposto através de uma versão QEP de um problema originalmente apresentado como EP em [4, Exemplo 4] e adaptado para QEP por Santos e Souza [5, Exemplo 4.1]. Uma vez que o método proposto não requer diferenciabilidade para o problema, o exemplo aqui apresentado foi escolhido por ser um QEP com dados não suaves.

O algoritmo foi escrito no MATLAB® R2017b em um computador com 8 GB RAM e Intel Core i7. O critério de parada adotado foi $||x^{k+1} - x^k|| < tol_{qep}$ e erro não superior a $\frac{1}{2}||x^{k+1} - x^k||$. Utilizamos $\gamma_k = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e resolvemos o subproblema do Passo 2 por meio de um método de subgradiente projetado (IPSM) introduzido por [4], o qual permite tratar com bifunções de equilíbrio possivelmente não diferenciáveis. Com respeito ao algoritmo IPSM, adotamos $\epsilon_k = \xi_k = 0$, $\rho_k = 3$ e $\beta_k = \dfrac{10}{3k}$. A projeção requerida pelo IPSM foi resolvida utilizando a subrotina "*quadprog*" do MATLAB e o critério de parada utilizado foi o mesmo de [4] com $\varepsilon = tol_{ep}$.

Exemplo 4.1. *[4, Exemplo 4 - versão QEP] Considere o problema de quase-equilíbrio não suave de dimensão* 2 *definido pela bifunção*

$$f(x, y) = |y_1| - |x_1| + y_2^2 - x_2^2$$

e a aplicação ponto-conjunto C *dada por*

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2_+ \,;\, y_1 + y_2 = 1 + \frac{|x_1|}{1 + |x_1|} \right\}.$$

Observe que a única solução do problema é o ponto $x^* = (1, \dfrac{1}{2})$.

Na Tabela 1, apresentamos cada iterada x^k, a precisão $\Upsilon(x^k)$ (veja Proposição 3.2) e a norma $\|x^{k+1} - x^k\|$ (veja hipótese H1) obtida pelo algoritmo considerando como ponto inicial $x^0 = (0, 0)$. Na Tabela 2, apresentamos o resultado médio obtido pelo algoritmo ao utilizar 100 pontos iniciais aleatórios tomados na caixa $[-5, 5]^2$. As colunas informam o mínimo, o máximo e a média das iterações além do tempo de CPU até o critério de parada ser satisfeito. Além disso, apresentamos a média tanto da precisão $\Upsilon(x^k)$ bem como da norma $\|x^{k+1} - x^k\|$ avaliados na última iterada x^k.

Tabela 1: PPM-inexato com $tol_{qep} = tol_{ep} = 10^{-6}$ e $x^0 = (0, 0)$.

Iter.(k)	x_1^k	x_2^k	$\|x^{k+1} - x^k\|$	$\Upsilon(x^k)$
0	0	0	0.70710678	–
1	0.50000000	0.50000000	0.33310648	0.33333333
2	0.83310569	0.50022764	0.12123194	0.12137224
3	0.95433690	0.50014081	0.03390424	0.03398088
4	0.98824038	0.50007711	0.00876260	0.00880266
5	0.99700220	0.50004051	0.00222701	0.00224759
6	0.99922844	0.50002099	0.00056833	0.00057898
7	0.99979598	0.50001106	0.00014809	0.00015341
8	0.99994332	0.50000567	0.00004038	0.00004289
9	0.99998303	0.50000280	0.00001193	0.00001303
10	0.99999446	0.50000130	0.00000391	0.00000436
11	0.99999804	0.50000057	0.00000136	0.00000157
12	0.99999913	0.50000039	0.00000063	0.00000076

Tabela 2: Resultados obtidos utilizando 100 pontos iniciais aleatórios tomados na caixa $[-5, 5]^2$, $tol_{ep} = 10^{-4}$ e $tol_{qep} = 10^{-6}$.

min iter.(k)	max iter.(k)	med. iter.(k)	med. $\|x^k - x^{k-1}\|$
10	14	10.53	5.1926e-07
min cpu(s)	max cpu(s)	med. cpu(s)	med. $\Upsilon(x^k)$
0.6594	2.3672	1.6803	6.7740e-07

5 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos uma versão inexata de um método do ponto proximal para resolver problemas de quase-equilíbrio. Numericamente, no exemplo implementado, o método obteve performance similar à sua versão exata, tanto em número de iteradas quanto em tempo de CPU, mesmo calculando os subproblemas de forma aproximada. Os trabalhos futuros irão considerar condições suficientes para que a hipótese (H1) se verifique, além de outras regularizações e mais teste numéricos para comprovar a eficácia do método.

Agradecimentos

E.L. Dias Júnior foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). J.C.O. Souza foi financiado em partes por CNPq $n°$ 313901/2020-1.

Referências

[1] Blum, E. and Oettli, W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *The Mathematics Student*, 63(1-4):123–145, 1994.

[2] Iusem, A.N. and Nasri, M. Inexact proximal point methods for equilibrium problems in Banach spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 28:1279–1308, 2007. DOI:10.1080/01630560701766668

[3] Mosco, U. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. Math.*, 3:512–585, 1969. DOI:10.1016/0001-8708(69)90009-7

[4] Santos, P.S.M. and Scheimberg, S. An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 30:91–107, 2011. DOI:10.1590/S1807-03022011000100005

[5] Santos, P.J.S. and Souza, J.C.O. A proximal point method for quasi-equilibrium problems in Hilbert spaces, *Optimization*, 1–16, 2020. DOI: 10.1080/02331934.2020.1810686

