Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Triângulos Heronianos Primitivos

Alessandro Firmiano de Jesus[1]
Academia da Força Aérea - AFA
João Paulo Martins dos Santos[2]
Academia da Força Aérea - AFA
Juan Lopes Linares[3]
Universidade de São Paulo - USP

Resumo. A obtenção de triângulos (a, b, c) com lados e área representados por inteiros positivos é uma tarefa da Teoria dos Números que intriga e fascina ainda nos dias atuais. Assim, o desafio para quem se aventurar na resolução de problemas diofantinos é de encontrar padrões matemáticos para que suas estratégias se aplique na maior quantidade de casos e situações possíveis. Neste trabalho, foi sugerido uma metodologia simples para a geração sistemática e de parâmetros diretos para determinação dos chamados triângulos de Heron. Assim, baseada nas conhecidas estratégias de Composições e Diferenças, foram disponibilizados Triângulos Heronianos Primitivos por meio de trincas pitagóricas $(a, b, b + k)$.

Palavras-chave. Teoria dos Números, Trincas Pitagóricas, Triângulos de Cheney.

1 Introdução

Heron de Alexandria (10 dC - 80 dC) foi um Matemático Grego que, entre outras contribuições, demonstrou uma fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer em função das medidas de seus lados (a, b, c). Essa expressão, que homenageia o seu nome, é dada pela equação

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1}$$

sendo $2s = a + b + c$ o valor do perímetro do triângulo dado [3].

O mesmo fascínio que conduz uma investigação de valores inteiros positivos na conhecida relação $c^2 = a^2 + b^2$, para definição de uma trinca Pitagórica, perfaz a identificação de triângulos quaisquer cuja medida de seus lados (a, b, c) e de sua área A, dada por (1), sejam valores inteiros positivos [2]. Estes triângulos especiais são chamados de triplas Heronianas e, caso o $\text{mdc}(a, b, c) = 1$, de tripla Heroniana Primitiva. É fato que a determinação destas triplas resultaram em algumas estratégias criativas [1] [7] [6]. O objetivo deste trabalho é caracterizar uma tripla Heroniana Primitiva em função de parâmetros provenientes das trincas Pitagóricas $(a, b, b + k)$ apresentadas em [5].

A metodologia proposta disponibiliza uma ou mais triplas Heronianas para um dado valor inteiro $a > 2$ que represente uma das alturas relativas do triângulo a ser gerado. E ainda, para algumas triplas Heronianas Primitivas conhecidas da literatura [7] é sugerida uma estratégia de **Composição** conforme definida por [1] e uma estratégia de **Diferença** conforme definida por [7]. Essas decomposições em União ou Diferenças de trincas Pitagóricas, multiplicadas por um fator de redução, podem ser generalizadas para quaisquer triplas Heronianas.

[1] firmianoafj@fab.mil.br
[2] jp2@alumni.usp.br
[3] jlopez@usp.br

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0485

O viés pedagógico deste trabalho tem por finalidade relacionar conceitos básicos da Geometria Plana com tópicos elementares da Teoria dos Números e ainda, explorar a desafiadora temática numérica para determinação categórica de Triângulos Heronianos.

2 Trincas Pitagóricas e Triplas Heronianas

Toda trinca Pitagórica pode ser representada por $(a, b, b+k)$ sendo $1 \leqslant k < a$ um parâmetro de mesma paridade do cateto a satisfazendo o critério de divisibilidade para definir o outro cateto

$$b = \frac{a^2 - k^2}{2k} \tag{2}$$

Segundo [5], todo número ímpar $a > 1$ é associado a uma trinca pitagórica da forma $(a, b, b+1)$ e todo número par $a > 2$ é associado a uma trinca na forma $(a, b, b+2)$. E ainda, se $a > 3$ for um número composto, o cateto a é associado a mais de uma trinca Pitagórica.

A verificação de que toda trinca pitagórica, assim como os triângulos isósceles obtidos pela junção da trinca com a sua reflexão por um dos catetos, são triplas Heronianas é imediata. No entanto, caso o cateto a pertencer a duas triplas pitagóricas distintas (a, b_1, c_1) e $(a, b_2, c_2 > c_1)$, então seguem definidos um triângulo $(c_1, c_2, b_2 + b_1)$ por **Composição** das trincas e um triângulo $(c_1, c_2, b_2 - b_1)$ por **Diferença** das trincas, tais que são ambos Heronianos. Na Figura 1(a) verifica-se quatro exemplos de triângulos Heronianos de mesma altura $a = 20$ e na Figura 1(b) verifica-se quatro exemplos de triângulos Heronianos de mesma altura $a = 21$.

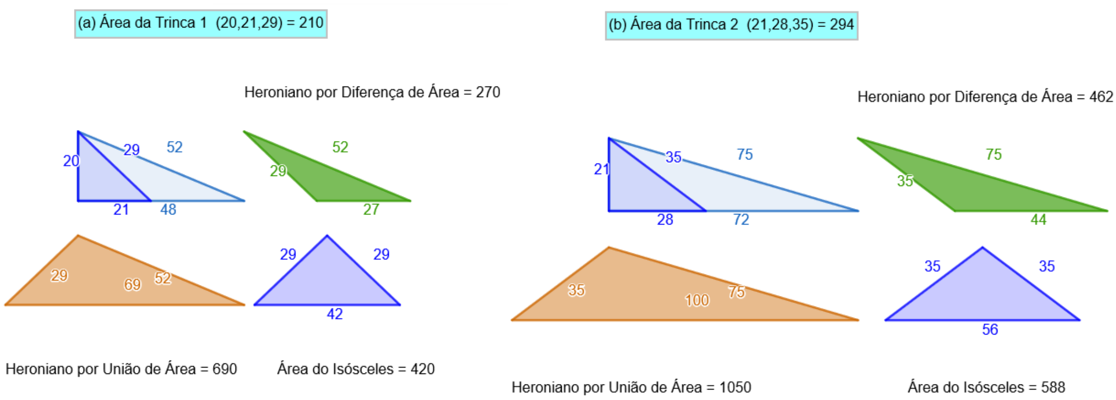

Figura 1: Triângulos Heronianos obtidos no GeoGebra Geometria

Observação 2.1. *Todos os Triângulos Heronianos da Figura 1 possuem, em cada um dos blocos (a) e (b), o mesmo valor do cateto a para indicar uma de suas alturas relativas.*

Na Figura 1(a) as triplas Heronianas que possuem um lado primo $p = 29$, i.e., $(20, 21, 29)$, $(27, 29, 52)$, $(29, 52, 69)$ e $(29, 29, 42)$ são Primitivas. Neste bloco, a tripla Heroniana $(20, 48, 52)$ é não-Primitiva. Na Figura 1(b), a única tripla Heroniana Primitiva é a $(35, 44, 75)$. Não está ilustrado na Figura 1, mas unindo-se as trincas $(20, 21, 29)$ e $(21, 28, 35)$ com sobreposição do cateto de valor comum igual a 21, será obtido outro triângulo Heroniano de lados $(29, 35, 48)$, altura $a = 21$ e área igual a 504. Logo, são muitas as possibilidades de se obter triângulos Heronianos através das trincas Pitagóricas.

É simples obter o triângulo Heroniano Primitivo da trinca $(20, 48, 52)$ e área $A = \frac{20 \cdot 48}{2} = 480$ ao dividir o valor da medida de cada lado por $\text{mdc}(20, 48, 52) = 4$ para obter a tripla $(5, 12, 13)$, cuja área inteira A_1 possui valor $\frac{A}{A_1} = \left(\frac{20}{5}\right)^2 = 4^2$, logo, $A_1 = \dfrac{480}{4^2} = 30$.

A mesma estratégia pode ser aplicada no triângulo $(35, 75, 100)$ ao dividir seus lados por $\text{mdc}(35, 75, 100) = 5$ e obter a tripla Heroniana Primitiva $(7, 15, 20)$ de área $A_2 = \dfrac{1050}{5^2} = 42$. A Figura 2 ilustra estas triplas Heronianas e os seus respectivos triângulos Primitivos.

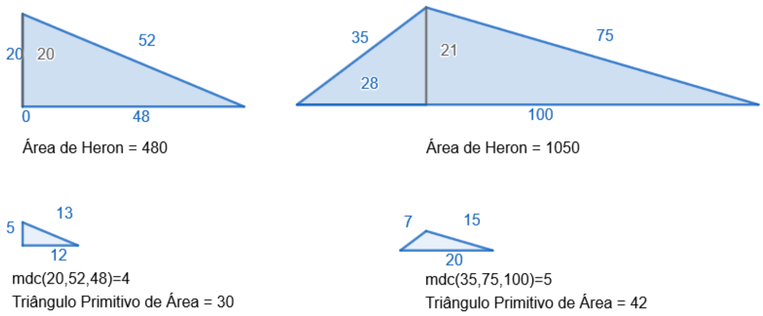

Figura 2: Triângulos Heronianos Primitivos obtidos no GeoGebra Geometria

Reciprocamente, dada uma tripla Heroniana Primitiva qualquer é possível encontrar as duas trincas pitagóricas (a, b_1, c_1) e (a, b_2, c_2) que a originou. Para exemplificar, considere os dois triângulos da Figura 1 que foram definidos por diferença de áreas. Na primeira tripla $(27, 29, 52)$, cuja área é $A_1 = 270$, determine o cateto a como sendo o numerador da fração irredutível que representa a altura relativa ao maior lado, i.e., $h = \dfrac{2A_1}{52} = \dfrac{135}{13}$, ou seja, faça $a = h \cdot 13 = 135$. Dessa forma, $c_1 = 27 \cdot 13 = 351$ e $c_2 = 29 \cdot 13 = 377$, resultando em $b_1 = \sqrt{c_1^2 - a^2} = 324$ e $b_2 = 52 \cdot 13 - b_1 = 352$. Dessa forma, as trincas $(135, 324, 351)$ e $(135, 352, 377)$ compõem o seguinte triângulo Heroniano $(351, 377, 676)$ cuja área é $A = 45.630$. Uma vez que $\text{mdc}(351, 377, 676) = 13$, ao dividir cada lado por este fator comum, determina-se então a tripla Heroniana Primitiva dada por $(27, 29, 52)$, cuja área é $A_1 = \dfrac{45.630}{13^2} = 270$.

E ainda, é fato que existem um total de 10 trincas pitagóricas que possuem o cateto $a = 135$. De [5]: $(135, 72, 153)$, $(135, 84, 159)$, $(135, 180, 225)$, $(135, 324, 351)$, $(135, 352, 377)$, $(135, 600, 615)$, $(135, 1008, 1017)$, $(135, 1820, 1825)$, $(135, 3036, 3039)$ e $(135, 9112, 9113)$. Ou seja, de altura relativa ao maior lado $h = 135$, contabilizam-se 45 maneiras distintas de obter, por união das trincas, todas as triplas Heronianas de triângulos escalenos e, consequentemente, as suas triplas primitivas. Por exemplo, a primeira trinca da lista acima, com as demais, duas a duas determinam as seguintes triplas Heronianas de altura relativa ao maior lado, $h = 135$: $(153, 159, 156)$, $(153, 225, 252)$, $(153, 351, 396)$, $(153, 377, 424)$, $(153, 615, 672)$, $(153, 1017, 1080)$, $(153, 1825, 1892)$, $(153, 3039, 3108)$ e $(153, 9113, 9184)$. Os respectivos valores inteiros de suas áreas são: 10.530, 17.010, 26.730, 28.620, 45.360, 72.900, 127.710, 209.790 e 619.920.

Para a segunda tripla $(35, 44, 75)$, cuja área é $A_2 = 462$, encontra-se $a = 25 \cdot h = 308$ para determinar a seguinte tripla Heroniana $(875, 1100, 1875)$ de área $A = 25^2 \cdot 462 = 288.750$. Existem 13 trincas pitagóricas para o cateto $a = 308$: $(308, 75, 317)$, $(308, 144, 340)$, $(308, 231, 385)$, $(308, 435, 533)$, $(308, 495, 583)$, $(308, 819, 875)$, $(308, 1056, 1100)$, $(308, 1680, 1708)$, $(308, 2145, 2167)$, $(308, 3381, 3395)$, $(308, 5925, 5933)$, $(308, 11856, 11860)$, $(308, 23715, 23717)$. Logo, é possível obter 78 triângulos escalenos que definem, por união, triplas Heronianas distintas e de altura relativa ao maior lado que é dado por $h = 308$.

3 A Expressão Matemática

Pela estratégia apresentada na seção anterior, existem duas possibilidades para gerar as triplas Heronianas que depende do fato da altura relativa estar ou não inserida no interior do triângulo. Uma vez que uma das alturas relativa sempre está inserida no interior de um triângulo qualquer, é possível generalizar a obtenção de toda tripla Heroniana Primitiva com o enunciado do seguinte:

Teorema 1 Considere duas trincas Pitagóricas associadas ao cateto a e dadas por $(a, b_i, b_i + k_i)$ e $(a, b_j, b_j + k_j)$, conforme [5]. Então o par (k_i, k_j) determina a seguinte tripla Heroniana Primitiva:

$$\left(r = \frac{a^2 + k_i^2}{2k_i}, s = \frac{a^2 + k_j^2}{2k_j}, t = \frac{k_i + k_j}{2} \cdot \frac{a^2 - k_i k_j}{k_i k_j}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{mdc}(r, s, t)} \tag{3}$$

Demonstração

Considere que cada trinca $(a, b, b + k)$ possui hipotenusa dada pelo inteiro $c = b + k = \dfrac{a^2 + k^2}{2k}$ e o outro cateto dado pelo inteiro $b = \dfrac{a^2 - k^2}{2k}$, conforme [5]. Assim, os lados $(r, s, b_i + b_j)$ da tripla Heroniana de altura relativa ao lado $b_i + b_j$ dada por $h = a$, são os valores inteiros $r = \dfrac{a^2 + k_i^2}{2k_i}$, $s = \dfrac{a^2 + k_j^2}{2k_j}$ e $t = b_i + b_j = \dfrac{a^2 - k_i^2}{2k_i} + \dfrac{a^2 - k_j^2}{2k_j} = \dfrac{k_i + k_j}{2} \cdot \dfrac{a^2 - k_i k_j}{k_i k_j}$. Portanto, após dividir cada lado por $\mathrm{mdc}(r, s, t)$, a tripla Heroniana Primitiva será dada por:

$$\left(\frac{a^2 + k_i^2}{2k_i}, \frac{a^2 + k_j^2}{2k_j}, \frac{k_i + k_j}{2} \cdot \frac{a^2 - k_i k_j}{k_i k_j}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{mdc}(r, s, t)}$$

□

Para ilustração do Teorema 1, segue apresentado a estratégia para obtenção das triplas Heronianas Primitivas $(25, 34, 39)$ e $(39, 58, 95)$. Estes dois exemplos são considerados como sendo triângulos **IHT**[4] de Cheney [7]. Uma vez que a tripla $(25, 34, 39)$ possui área $A_1 = 420$, segue que a altura relativa ao maior lado do triângulo é a fração irredutível $h = \dfrac{2A_1}{39} = \dfrac{280}{13}$. Considere então $a = 280$ e calcule $c_1 = 25 \cdot 13 = 325$, $k_1 = c_1 - b_1 = 325 - \sqrt{c_1^2 - a^2} = 160$, $c_2 = 34 \cdot 13 = 442$, e $k_2 = c_2 - b_2 = 442 - \sqrt{c_2^2 - a^2} = 100$. Portanto, substituindo $a = 280$, $k_1 = 160$ e $k_2 = 100$ na Equação (3) obtém-se a conhecida tripla Heroniana Primitiva:

$$(325, 442, 507) \cdot \frac{1}{13} = (25, 34, 39)$$

Para o **IHT** $(39, 58, 95)$, que possui área $A_2 = 456$, são calculados $a = 48$, $k_1 = 6$ e $k_2 = 4$ para obter a conhecida tripla Heroniana Primitiva:

$$(195, 290, 475) \cdot \frac{1}{5} = (39, 58, 95)$$

Dessa forma, as duas triplas **IHT** de Cheney foram ambas facilmente obtidas pela estratégia de União de áreas e fator de redução, conforme seguem ilustradas na Figura (3) as respectivas decomposições em trincas Pitagóricas.

[4] Acrônimo do termo inglês *Indecomposable Heron Triangles*.

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0485

Esta nova abordagem que propõe decomposições das triplas Heronianas através de parâmetros a, k_i e k_j, conforme enunciadas no Teorema 1, possibilita a identificação de algumas propriedades interessantes.

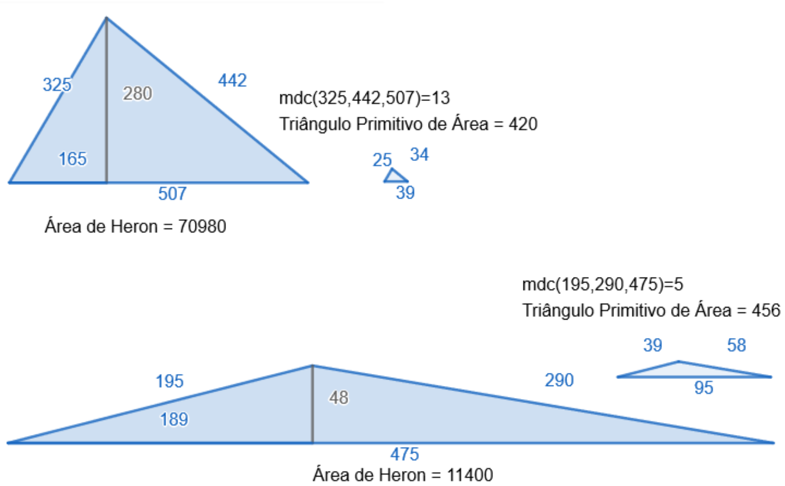

Figura 3: Decomposição de duas triplas IHT de Cheney implementadas no GeoGebra

P1. Para todos os valores dos parâmetros $1 \leqslant k_i \leqslant k_j \leqslant a$ das trincas pitagóricas, o respectivo triângulo Heroniano resultante da tripla

$$\left(\frac{a^2+k_i^2}{2k_i}, \frac{a^2+k_j^2}{2k_j}, \frac{k_i+k_j}{2} \cdot \frac{a^2-k_ik_j}{k_ik_j}\right)$$

possui altura relativa $h = a$ e área inteira dada pela expressão $A = \dfrac{a^3(k_i+k_j) - a(k_i^2k_j + k_ik_j^2)}{4k_ik_j}$.

P2. Se $k_i = k_j$, então a tripla Heroniana Primitiva da equação (3) será um triângulo isósceles.

P3. Se $a > 1$ for um número ímpar, então a tripla $\left(\dfrac{a^2+1}{2}, \dfrac{a^2+1}{2}, a^2-1\right)$ representa um triângulo Heroniano Primitivo isósceles de altura relativa à base como sendo $h = a$.

P4. Se $a = 4n$ para $n \in \mathbb{N}$, então a tripla $\left(\dfrac{a^2+4}{4}, \dfrac{a^2+4}{4}, \dfrac{a^2-4}{2}\right)$ representa um triângulo Heroniano Primitivo isósceles de altura relativa à base como sendo $h = a$.

P5. Não existem triângulos equiláteros que são triplas Heronianas.

P6. Se um triângulo escaleno cujo valores de seus lados e de sua área são números inteiros positivos e, ainda, possui uma altura relativa $h = p$ para p um número primo, então essa tripla Heroniana Primitiva será uma trinca pitagórica.

P7. Se $p > 2$ é primo, então existe uma única tripla Heroniana Primitiva isósceles cuja altura relativa à base é $h = p$. Neste caso, a tripla será dada por **P3.**

As propriedades **P1.** e **P2.** são imediatas. As propriedades **P3.** e **P4.** seguem do fato de que todo número ímpar $a > 1$ pertence a uma trinca pitagórica com $k = 1$ e que todo número par $a > 2$ pertence a uma trinca com $k = 2$ [5]. A propriedade **P5.** resulta do fato de não haver trinca pitagórica cuja hipotenusa é o dobro de um cateto e **P6.** é devido ao fato de não haver mais de uma trinca pitagórica cujo cateto possui medida igual a um número primo p [5], portanto, esta única trinca será a tripla Heroniana de altura p. A propriedade **P7.** é imediata.

Especificamente para triângulos obtusângulos, dos quais podem ser aplicados a estratégia da Diferença de áreas e fator de redução das trincas pitagóricas, é enunciado o seguinte resultado.

Corolário Considere duas trincas Pitagóricas associadas ao cateto a e dadas por $(a, b_i, b_i + k_i)$ e $(a, b_j, b_j + k_j)$. Então o par (k_i, k_j) dado em [5], determina a tripla Heroniana Primitiva:

$$\left(r = \frac{a^2 + k_i^2}{2k_i}, s = \frac{a^2 + k_j^2}{2k_j}, t = \frac{|k_i - k_j|}{2} \cdot \frac{a^2 + k_i k_j}{k_i k_j}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{mdc}(r, s, t)} \tag{4}$$

Demonstração

Faça a diferença $t = |b_i - b_j|$. A presença do valor absoluto $|\cdot|$ na expressão (4) isenta a identificação do menor valor entre os catetos b_i e b_j. $\square$

O Teorema 1 e o Corolário acima permitem a apresentação da seguinte propriedade:

P8. A geração de qualquer tripla Heroniana Primitiva por trincas Pitagóricas não é única.

A verificação de **P8.** pode ser realizada na apresentação dos seguintes contra exemplos:

a.) A tripla isósceles da Figura 1(a) pode ser obtida por União e por Diferença de áreas:

$$\underbrace{(29, 29, 42)}_{A=420} = \underbrace{(20, 21, 29)}_{A_1=210} \cup \underbrace{(20, 21, 29)}_{A_2=210} = \left(\underbrace{(840, 882, 1218)}_{A_2=370.440} - \underbrace{(840, 41, 841)}_{A_1=17.220}\right)\frac{1}{29}$$

b.) A trinca Primitiva da Figura 2 também pode ser obtida por União de áreas:

$$(5, 12, 13) = (5, 12, 13) \cup \emptyset = \Big((60, 25, 65) \cup (60, 144, 156)\Big)\frac{1}{13}$$

c.) A tripla **IHT** de Cheney dada pelo triângulo acutângulo da Figura 3 pode ser gerada, por União de áreas, de três formas diferentes:

$$\begin{aligned}(25, 34, 39) &= \Big((168, 26, 170) \cup (168, 99, 195)\Big)\frac{1}{5} = \Big((280, 165, 325) \cup (280, 342, 442)\Big)\frac{1}{13} = \\ &= \Big((420, 65, 425) \cup (420, 513, 663)\Big)\frac{1}{17}\end{aligned}$$

d.) Outra tripla **IHT**, considerada a menor cujo os vértices estão sobre pontos de uma malha cartesiana de números inteiros [7], possui as seguintes decomposições:

$$\begin{aligned}(5, 29, 30) &= \Big((24, 7, 25) \cup (24, 143, 145)\Big)\frac{1}{5} = \Big((144, 42, 150) - (144, 17, 145)\Big)\frac{1}{5} = \\ &= \Big((144, 858, 870) - (144, 17, 145)\Big)\frac{1}{29}\end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0485

4 Considerações Finais

A literatura disponibiliza várias estratégias para a geração de triplas Heronianas que dependem de dois ou mais parâmetros [2] [4] [6]. Neste trabalho, essas triplas são obtidas de um parâmetro livre $a > 2$ e de outro parâmetro $1 \leqslant k < a$ que, de acordo com [5], deve satisfazer a condição de paridade e o critério de divisibilidade (2). Assim, o valor inteiro de k depende fortemente do valor inteiro de a. No entanto, a considerável diminuição na quantidade de valores para k não impede a geração de qualquer tripla Heroniana Primitiva. Outra característica importante ocorre quando se identifica as trincas Pitagóricas como sendo triplas de Heron, pois as propriedades heronianas são naturalmente herdadas. Por exemplo, uma vez que a área de toda tripla é um múltiplo de 6, conclui-se que toda trinca $(a, b, b + k)$ também possui área múltiplo de 6. Logo, se o cateto $a > 3$ for primo, o outro cateto b será sempre um múltiplo de 12. Outra propriedade herdada garante que o perímetro da trinca $(a, b, b + k)$ é sempre um número par e o seu semiperímetro é sempre um número composto. Por fim, toda trinca Pitagórica $(2n + 1, b, b + 1)$ ou $(4n, b, b + 2), \forall n \in \mathbb{N}$, são triplas Heronianas Primitivas, assim, apenas um dos seus lados é par.

A simplicidade algébrica e geométrica desenvolvida para a obtenção dos Triângulos Heronianos é um fator de acessibilidade para uma apropriada discussão desses conceitos em níveis elementares da educação escolar.

Referências

[1] Carlson, J. R.*Determination of heronian triangles. Fibonacci Quarterly*, v. 8, p. 499–506, 1970.

[2] Carmichael, R. D. *Diophantine Analysis.* John Welley Sons, Inc. New York, 1915.

[3] Dickson, L. E. *History of the theory of numbers.* Washington Carnegie Institution. Washington, 1919.

[4] Fricke, J. *On Hero simples and integer Embedding.* Institut für Mathematik und Informatik Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald, 2008.

[5] Jesus, A. F. et al. *As infinitas trincas pitagóricas de Euclides. C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, Edição Ermac, Bauru, v.17, p.13–26, 2020. DOI: 10.21167/cqd-vol17ermac202023169664afjjpmsmeecec1326

[6] Silva, H. F. Triângulos Heronianos, Dissertação de Mestrado - PROFMAT. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2017.

[7] Yiu, P. Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles. *Florida: 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America*, 2008.

