Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Quanto custa completar o álbum de figurinhas da Copa?

Guilherme Miguel Rosa[1]
Roy Wilhelm Probst[2]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo sobre o Problema do Colecionador de Cupons aplicado ao desafio de colecionar as figurinhas do álbum oficial da Copa do Mundo de futebol de 2018. O custo médio para completar um álbum é determinado considerando diferentes cenários, como a colaboração entre colecionadores. As soluções obtidas são validadas através de resultados numéricos que simulam o processo de coleção das figurinhas.

Palavras-chave. Probabilidade, Valor esperado, Problema do Colecionador de Cupons.

1 Introdução

A cada quatro anos acontece a Copa de Mundo de futebol e com ela retorna uma prática muito popular entre os apaixonados pelo esporte. Trata-se da coleção de figurinhas do álbum oficial do Mundial, cujo desafio consiste em conseguir todas as figurinhas do álbum comprando pacotes com figurinhas aleatórias. Como são adquiridas aleatoriamente, é natural que conforme a coleção avança apareçam figurinhas repetidas, isto é, figurinhas já obtidas pelo colecionador anteriormente. Com isso é preciso seguir comprando até conseguir todas as figurinhas necessárias para completar o álbum. É nesse momento que surge uma questão incluindo a matemática na brincadeira e tornando-a ainda mais interessante: quantas figurinhas são necessárias comprar para completar o álbum?

Esse é um problema que já foi estudado na teoria das probabilidades e ficou conhecido na literatura matemática como o *Problema do Colecionador de Cupons* [3]. Sua descrição é simples: considere uma pessoa que coleciona objetos (cupons) e suponha que existe um número finito de objetos (cupons) diferentes para serem colecionados. Adquirindo-se aleatoriamente um por vez, quantas aquisições são necessárias em média para completar uma coleção?

Neste trabalho será estudado o *Problema do Colecionador de Cupons* em sua versão mais simples, que é o caso de elementos equiprováveis adquiridos um por vez. O objetivo é determinar o custo médio para completar o álbum de figurinhas oficial da última Copa do Mundo, realizada em 2018 na Rússia.

2 O Problema do Colecionador de Cupons

O Problema do Colecionador de Cupons consiste em determinar quantos elementos espera-se adquirir para completar m coleções de n elementos. Os resultados dessa seção são baseados na resposta de Newman e Shepp [3] para esse problema. As demonstrações dos lemas são omitidas e podem ser encontradas na referência [4].

[1]gui.miguelrosa@gmail.com.
[2]rwprobst@utfpr.edu.br.

2.1 Completando um álbum

Completar uma coleção finita de n objetos sem trocar os objetos adquiridos repetidamente consiste no clássico *Problema do Colecionador de Cupons*. Sua solução corresponde ao número de unidades que precisam ser adquiridas em média para concluir o desafio.

Para chegar na solução, basta observar a probabilidade de se obter um elemento ainda não colecionado em cada etapa da coleção, tomar o inverso das probabilidades para obter a quantidade esperada de elementos a serem comprados e realizar o somatório.

Seja k o número de elementos já obtidos entre os n totais da coleção, a probabilidade de se obter um elemento ainda não colecionado na próxima aquisição é

$$\frac{n-k}{n}.$$

Adquirido um novo elemento, ele pode ser o $(k+1)$-ésimo inédito, o que representa o sucesso do experimento, mas também pode ser um mesmo elemento dentre os k já colecionados. Nesse caso, o colecionador repetirá o experimento, ou seja, terá que adquirir mais um elemento e seguir assim até atingir seu objetivo. Significa que o número médio de tentativas até obter o $(k+1)$-ésimo elemento da coleção é

$$\frac{n}{n-k}.$$

O número esperado E de unidades adquiridas para se conseguir todos os n que completam a coleção é dada por

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i}. \tag{1}$$

Uma maneira mais compacta de escrever a soma é percebendo que os denominadores são naturais de 1 até n, logo

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}. \tag{2}$$

2.2 Completando mais de um álbum

Cada coleção pode ser interpretada como um álbum cujos elementos são as figurinhas que o compõe. Seja p_i a probabilidade de não completar m álbuns após adquirir i figurinhas e $E_m(n)$ a quantidade esperada de figurinhas compradas para completar os m álbuns de n figurinhas, o resultado a seguir mostra como calcular a quantidade esperada [2].

Lema 2.1.

$$E_m(n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i.$$

A quantidade de maneiras diferentes de se adquirir i figurinhas, uma por vez, é n^i, pois existem n possibilidades em cada retirada. De todas as possibilidades, N_i representa o número de maneiras nas quais não se completam os m álbuns desejados. Assim

$$p_i = \frac{N_i}{n^i}.$$

Por exemplo, seja $n = 2$ e $m = 2$, onde n representa o número de figurinhas e m o número de álbuns. Pelo Lema (2.1) é possível determinar a quantidade esperada de figurinhas compradas para completar 2 álbuns com 2 figurinhas:

$$E_2(2) = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{8}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \frac{12}{2^5} + \frac{14}{2^6} + \cdots = 5{,}5.$$

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0468

2.3 Completando m álbuns de n figurinhas

Generalizando para m álbuns de n figurinhas, representadas por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, N_i é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^i$ após removidos os termos com todos os expoentes $\geq m$. Alternativamente, N_i é $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^i$ expandido e avaliado em $x_1 = \cdots = x_n = 1$ depois que os termos com todos os expoentes $\geq m$ são removidos.

Definição 2.1: Para m fixo, se $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é um polinômio ou série de potências, então $\{P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ é o polinômio ou série de potências resultante quando os termos com todos os expoentes $\geq m$ são removidos.

Em termos da Definição 2.1, tem-se

$$p_i = \frac{\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^i\}}{n^i},$$

avaliado em $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

Definição 2.2:

$$S_m(t) = \sum_{k<m} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

De acordo com a Definição 2.2, $S_m(t)$ é obtida removendo os termos da série e^t que apresentam expoente $\geq m$, ou seja, é um truncamento da série de Maclaurin da função exponencial.

Definição 2.3:

$$F = e^{x_1 + \cdots + x_n} - (e^{x_1} - S_m(x_1))(e^{x_2} - S_m(x_2)) \cdots (e^{x_n} - S_m(x_n)).$$

O próximo resultado generaliza como calcular F a partir da Definição 2.3.

Lema 2.2.

$$F = \{e^{x_1 + \cdots + x_n}\}.$$

Voltando ao problema de achar a quantidade esperada de figurinhas para completar m álbuns de n figurinhas, pelo Lema (2.1), tem-se

$$E_m(n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^i\}}{n^i},$$

avaliado em $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Por outro lado, pelo Lema (2.2) e da série de Maclaurin da função exponencial, segue que

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^i\}}{i!}.$$

Para usar F no cálculo de $E_m(n)$ é preciso trocar $1/i!$ por $1/n^i$, e isso é obtido com a identidade a seguir.

Lema 2.3.

$$n \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^i},\ i = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

Através dos resultados apresentados é possível demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.1.

$$E_m(n) = n \int_0^{\infty} 1 - [1 - e^{-t} S_m(t)]^n dt.$$

Demonstração. Pelos Lemas (2.3) e (2.2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\{(x_1 + \cdots + x_n)^i\}}{n^i} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\{(x_1 + \cdots + x_n)^i\} n \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-nt} dt \right] \\
&= n \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\{(x_1 + \cdots + x_n)^i\} t^i}{i!} \right] e^{-nt} dt \\
&= n \int_0^{\infty} [e^{t(x_1 + \cdots + x_n)} - [e^{tx_1} - S_m(tx_1)] \cdots [e^{tx_n} - S_m(tx_n)]] e^{-nt} dt.
\end{aligned}$$

Avaliando em $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
E_m(n) &= n \int_0^{\infty} [e^{nt} - (e^t - S_m(t)) \cdots (e^t - S_m(t))] e^{-nt} dt \\
&= n \int_0^{\infty} [1 - (e^t - S_m(t))^n (e^{-t})^n] dt \\
&= n \int_0^{\infty} 1 - [1 - e^{-t} S_m(t)]^n dt.
\end{aligned}$$

□

Essa é a solução para o *Problema do Colecionador de Cupons* com trocas: a quantidade esperada de figurinhas compradas para completar m álbuns de n figurinhas pode ser calculada por

$$E_m(n) = n \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \cdots + \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}}{e^t} \right)^n \right] dt. \tag{3}$$

3 Resultados numéricos

Nessa seção são obtidos resultados numéricos acerca da coleção de figurinhas do álbum oficial da Copa do Mundo de 2018. Os detalhes da implementação podem ser encontrados na referência [4].

3.1 Valor esperado sem trocas

No álbum oficial da Copa do Mundo de 2018 do grupo Panini há 682 figurinhas a serem colecionadas. Por (2), a quantidade média ou esperada de figurinhas compradas para completar o álbum sem trocas é dada por

$$E = \sum_{i=1}^{682} \frac{682}{i} \approx 4844.$$

Do total de figurinhas, é interessante observar que são necessárias menos de 10% para completar metade do álbum, ou seja, colar 341 figurinhas. Por (1), calcula-se

$$\sum_{i=0}^{340} \frac{682}{682 - i} \approx 472.$$

Neste contexto observa-se que mais de 90% das figurinhas são necessárias para completar a segunda parte do álbum, algo que pode parecer contraintuitivo. Mas quanto mais próximo do final da coleção, menor a probabilidade de conseguir uma figurinha inédita, com isso é preciso comprar cada vez mais. Para se ter uma ideia, quase duas mil figurinhas são necessárias, em média, para obter apenas as 10 últimas da coleção. Por (1), tem-se

$$\sum_{i=672}^{681} \frac{682}{682-i} \approx 1998.$$

Para facilitar a tarefa do colecionador, a Panini (responsável pela produção dos álbuns e figurinhas) oferece a possibilidade de encomendar as últimas 40 figurinhas restantes. Utilizando o serviço, é necessário coletar 642 figurinhas das 682, com isso a quantidade média de figurinhas a serem adquiridas de maneira aleatória reduz consideravelmente. Por (1), tem-se

$$\sum_{i=0}^{641} \frac{682}{682-i} \approx 1926.$$

As figurinhas são vendidas em pacotes com cinco unidades cada, por R$ 2,00 o pacote no Brasil, onde o comprador não deve encontrar duplicatas em um pacote. Porém, no presente trabalho, por questão de simplicidade, adota-se a hipótese de que as figurinhas possam ser compradas aleatoriamente de forma unitária, por R$ 0,40 cada uma. Conclui-se que o custo para completar o álbum sem trocas é, em média, aproximadamente $4844 \times 0{,}40 = 1937{,}60$ reais, sem encomendar da Panini as últimas 40 figurinhas faltantes. Aproveitando-se do benefício, o custo é, em média, $1926 \times 0{,}40 = 770{,}40$ reais, mais as despesas de manuseio e postagem das 40 figurinhas. Por esse serviço, a Panini cobra 25,00 reais, logo, o preço total é de $770{,}40 + 25{,}00 = 795{,}40$ reais.

Todos os cálculo dos somatórios foram realizados através do software *WolframAlpha* [5].

3.2 Valor esperado com trocas

A expressão $E_m(n)$ obtida em (3) fornece a quantidade esperada de figurinhas para completar m álbuns de n figurinhas. Dividindo esse valor pelo número de álbuns tem-se a quantidade esperada de figurinhas por álbum. Assim, supondo que um grupo de n amigos deseja completar m álbuns trocando as figurinhas repetidas entre si, a quantidade média de figurinhas que cada amigo precisa para completar seu álbum pode ser calculado por

$$\frac{E_m(n)}{m} = \frac{n}{m} \int_0^{\infty} 1 - [1 - e^{-t} S_m(t)]^n \, dt.$$

A Tabela 1 apresenta a quantidade esperada de figurinhas e o custo (em R$) por pessoa em algumas situações.

Tabela 1: Quantidade esperada por colecionador.

Colecionadores	Figurinhas	Custo
1 (sozinho)	4844	1937,60
2	3219	1287,60
5	2050	820,00
10	1563	625,20
20	1262	504,80
50	1025	410,00

A Tabela 2 apresenta uma comparação das diferentes maneiras de completar um álbum.

Tabela 2: Custo (em R$) para completar um álbum em diferentes situações.

Situação	Figurinhas	Custo
Sozinho	4844	1937,60
Com o serviço da Panini	1926	795,40
Trocando com 1 amigo	3219	1287,60
Trocando com 9 amigos	1563	625,20

Foi utilizado o software livre *Octave* [1] para calcular $E_m(n)/m$ dado na expressão, assim como para as simulações na próxima seção.

3.3 Simulações

Visando comparar os resultados teóricos com uma situação mais próxima da realidade, foi implementado uma simulação do processo de coleção das figurinhas.

Os resultados obtidos com 100 simulações encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3: Quantidade esperada x Média das simulações.

Colecionadores	Quantidade esperada	Média das simulações	Variação
1 (sozinho)	4844	4940	1,94%
2	3219	3217	0,06%
5	2050	2075	1,20%
10	1563	1556	0,45%
20	1262	1265	0,24%
50	1025	1023	0,19%

O maior custo computacional obtido durante as simulações numéricas foi de aproximadamente 5 minutos em um computador com processador de 1.8 GHz e 6 GB de memória RAM.

Na prática existe um cenário ainda melhor, onde o colecionador pode trocar as figurinhas repetidas e ainda aproveitar a possibilidade de comprar as últimas 40 faltantes com o serviço da Panini. A próxima simulação considera essa situação, computando o número necessário de figurinhas até que o total de figurinhas faltantes em todos os álbuns corresponda a quantidade que pode ser comprada diretamente com a fabricante.

A Tabela 4 apresenta a média dos resultados de 100 simulações, onde o custo por pessoa é o custo total (em R$), que inclui o gasto com as figurinhas compradas para obter as 642 mais o valor cobrado pela Panini pelo envio das 40 faltantes.

Tabela 4: Simulações para completar um álbum com trocas e utilizando o serviço da Panini.

Colecionadores	Figurinhas	Custo
1 (sozinho)	1925	795,00
2	1337	559,80
5	951	405,40
10	811	349,40
20	732	317,80
50	678	296,20

Nessa simulação, o maior custo computacional foi de aproximadamente 9 minutos.

4 Conclusão

Este trabalho tem como objetivo determinar o custo médio para se completar o álbum de figurinhas oficial da Copa do Mundo de 2018 a partir da quantidade esperada de figurinhas necessárias. Para isso foi obtida a solução do *Problema do Colecionador de Cupons*, primeiro na versão clássica e depois na versão envolvendo as trocas, verificando-se todos os resultados de Newman e Shepp. Adotando as hipóteses de que todas as figurinhas possuem a mesma probabilidade de aparecer e que elas podem ser compradas aleatoriamente uma a uma, juntamente com a implementação das fórmulas, foi possível determinar computacionalmente o número de figurinhas necessárias e consequentemente o custo médio para um colecionador completar sua coleção em diferentes cenários, seja sozinho ou trocando as figurinhas repetidas. As simulações realizadas comprovaram que a teoria funciona à medida que o experimento é repetido muitas vezes. Quanto mais simulações são realizadas, mais a média tende ao valor esperado teórico. Para fim de divulgação, os principais resultados deste trabalho encontram-se em um vídeo no *YouTube*, disponível em `https://youtu.be/EvO4nJ9LyjY`.

Referências

[1] Eaton, J.W. et al. *GNU Octave*. Disponível em `https://www.gnu.org/software/octave/`. Acesso em: 15 abr. 2019.

[2] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, New York, v.1, 1950.

[3] Newman, D.J.; Shepp, L. The double dixie cup problem. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v.67, n.1, p. 58–61, 1960.

[4] Rosa, G. M. O Problema do Colecionador de Cupons: quanto custa completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo?, Dissertação de Mestrado, UTFPR/Curitiba, 2019.

[5] Wolfram Research, Inc. *Wolfram|Alpha*. Disponível em `https://www.wolframalpha.com/`. Acesso em: 15 abr. 2019.

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0468