

Sobre o efeito de memória no cálculo fracionário

Michele Martins Lopes¹

IMECC/Unicamp, Campinas, SP

Francielle Santo Pedro²

DMD/Unifesp, Osasco, SP

Estevão Esmi³

IMECC/Unicamp, Campinas, SP

José Paulo Carvalho dos Santos⁴

ICEx/Unifal, Alfenas, MG

Daniel Sánchez Ibáñez⁵

Centro Docencia Cs. Básicas para Ingeniería /UACH, Valdivia, Chile.

Laécio Carvalho de Barros⁶

IMECC/Unicamp, Campinas, SP

Resumo. O cálculo fracionário tem sido bastante utilizado na modelagem de problemas reais. Ele apresenta, como sua principal vantagem, o efeito de memória na dinâmica do sistema. O objetivo deste trabalho é, através de uma abordagem estatística, atestar tal efeito de memória neste cálculo. Mais especificamente, o efeito de histerese. Além disso, analisamos a contribuição dos valores históricos de uma função na aplicação dos operadores fracionários. Por fim, para ilustrar a eficiência dessa ferramenta na modelagem matemática, realizamos uma aplicação a fim de compará-la com o cálculo clássico.

Palavras-chave. Memória, Cálculo fracionário, Caputo, Esperança Estatística.

1 Introdução

O cálculo fracionário originou-se em 1695 como a generalização do cálculo de ordem inteira. Dessa forma, é possível definir integrais e derivadas com ordens arbitrárias. Desde o seu surgimento, muitas contribuições foram dadas. Entre alguns nomes podemos destacar: Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel e Liouville.

Diversas definições foram propostas para a integral fracionária, sendo a integral fracionária de Liouville, Weyl e Riemann-Liouville algumas delas. O mesmo ocorre para a derivada fracionária, a qual também possui diversas definições, como, por exemplo, as derivadas de Riemann-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl, Riesz, Grünwald-Letnikov, Marchaud e Hifler [2]. Com exceção da derivada fracionária de Caputo, a maioria das definições de derivada fracionária não satisfazem a propriedade na qual a derivada de uma constante é nula. Outras definições que são mais comumente utilizadas na atualidade são a de Riemann-Liouville e a de Grünwald-Letnikov, sendo esta última mais apropriada para aplicações numéricas [2].

¹mi.martins22@hotmail.com

²fsimoes@unifesp.br

³eelaureano@gmail.com

⁴zepaulo@unifal-mg.edu.br

⁵danielsanch@gmail.com

⁶laecioeb@ime.unicamp.br

O trabalho está dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos algumas definições necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 3 apresentamos os principais resultados do trabalho, onde mostramos o efeito de histerese no cálculo fracionário através de ferramentas estatísticas e analisamos a contribuição dos valores históricos da função para o cálculo dos operadores fracionários. Na Seção 4, encerramos com uma aplicação numérica na qual é possível perceber como o cálculo fracionário contribui na descrição de fenômenos reais.

2 Preliminares

Nesta seção vamos apresentar alguns dos principais resultados do cálculo fracionário necessários para a compreensão do trabalho.

Definição 2.1 (Integral de Riemann-Liouville [10]). *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $f \in L^p([0, b] : \mathbb{R}^m)$, com $1 \leq p \leq \infty$. A Integral fracionária de Riemann-Liouville, para $t \in [0, b]$, de ordem α , é dada por*

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1)$$

Neste trabalho denotaremos por $AC^n[0, b]$ o conjunto de funções com a derivada de ordem $n-1$ sendo absolutamente contínua em $[0, b]$, como em [3].

Definição 2.2 (Derivada Fracionária de Riemann-Liouville [10]). *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$, $f \in AC^n[0, b]$ e $n = [\alpha]$. Definimos a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α por*

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^n J_t^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds\right). \quad (2)$$

Definição 2.3 (Derivada Fracionária de Caputo [6] [10]). *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $f \in AC^n[0, b]$. Definimos a derivada fracionária de Caputo, para $t \in [0, b]$, de ordem α , por*

$${}_c D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha (f(t) - f(0)). \quad (3)$$

Ademais, para $\alpha \in (0, 1)$, é possível mostrar que [6]

$${}_c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t). \quad (4)$$

Definição 2.4 (Função Beta [6]). *A função beta é definida pela integral*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \text{ sendo } \alpha, \beta > 0. \quad (5)$$

Definição 2.5 (Distribuição Beta [7]). *Dizemos que uma variável aleatória X segue a distribuição beta se ela possui função densidade de probabilidade dada por:*

$$f_X(x) = f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x), \quad (6)$$

sendo $\alpha, \beta > 0$ e I a função indicadora.

Definição 2.6. [7] *Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. Então, a esperança ou valor esperado de X é dado por*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (7)$$

Proposição 2.1. [7] *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. A esperança ou valor esperado de $g(X)$ é dado por*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (8)$$

3 Abordagem Estatística para Operadores Fracionários

Nesta seção mostramos o efeito de memória (ou, mais especificamente, efeito de histerese) no cálculo fracionário via teoria estatística, que até onde sabemos, foi feito pela primeira vez pelos autores em [1]. Isto será feito através da integral e das derivadas fracionárias de uma função f .

Proposição 3.1. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f \in AC[0, b]$. Sobre essas condições, vale*

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} E[f(tU)]; \tag{9}$$

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} E[f(tW)] + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} E[f'(tV)], \text{ se } 0 < \alpha < 1; \tag{10}$$

$${}_cD_t^\alpha f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} E[f'(tW)], \text{ se } 0 < \alpha < 1, \tag{11}$$

onde U, V e W são variáveis aleatórias com distribuições $U \sim B(1, \alpha), V \sim B(2, 1 - \alpha)$ e $W \sim B(1, 1 - \alpha)$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [1]. □

Observação 3.1. *Note que, pela definição 2.3, trocando $f(t)$ por $f(t) - f(0)$ ou, equivalentemente, $f(tW)$ por $f(tW) - f(0)$ em (10), para $0 < \alpha < 1$, podemos reescrever a derivada de Caputo como segue:*

$${}_cD_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} E[f(tW) - f(0)] + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} E[f'(tV)]. \tag{12}$$

Podemos ver que (12) coincide com (11). Isso segue da demonstração da Proposição 3.1 e das definições 2.3 e 2.4.

Observação 3.2. *Note que, para $0 < \alpha < 1$, ${}_cD_t^\alpha f(t_\alpha) = 0$ não implica que t_α é um ponto de máximo (ou mínimo) de f . De fato, suponha que f tem apenas um máximo local em t^* . Neste caso, temos $f'(s) > 0$ para todo $s < t^*$. Isso implica que $E[f'(tW)] > 0$ para todo $t \leq t^*$. Portanto, por (11), se ${}_cD_t^\alpha f(t_\alpha) = 0$ então $t_\alpha > t^*$. Isto é, ${}_cD_t^\alpha f(t_\alpha) = 0$, mas t_α não é o ponto de máximo de f .*

A seguir providenciamos alguns exemplos de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo utilizando as fórmulas (10) e (11).

Exemplo 1: Se $f(t) = k$, onde k é constante, temos $E[f(tW)] = E[k] = k$ e $E[f'(tV)] = E[f'(tW)] = E[0] = 0$. Portanto, de (10) temos $D_t^\alpha f(t) = \frac{kt^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$, e de (11) temos ${}_cD_t^\alpha f(t) = 0$.

Exemplo 2: Se $f(t) = t^\gamma$, com $\gamma \in (-1, \infty)$, note que

$$E[f(tW)] = t^\gamma (1 - \alpha) B(\gamma + 1, 1 - \alpha) \quad \text{e} \quad E[f'(tV)] = \frac{\gamma t^{\gamma-1}}{B(2, 1 - \alpha)} B(\gamma + 1, 1 - \alpha). \tag{13}$$

Além disso,

$$E[f'(tW)] = \frac{\gamma t^{\gamma-1}}{B(1, 1 - \alpha)} B(\gamma, 1 - \alpha). \tag{14}$$

Com isso,

$$D_t^\alpha f(t) = cD_t^\alpha f(t) = t^{\gamma-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}. \quad (15)$$

Demonstração. Para mais detalhes, ver [1]. □

Os resultados acima de fato coincidem com os apresentados na literatura, mostrando que as equações (10) e (11) podem ser usadas ao invés da abordagem tradicional do cálculo fracionário.

3.1 O fenômeno de histerese

Quando o estado atual de um sistema é influenciado pela dinâmica de seu passado histórico, diz-se que tal sistema apresenta o fenômeno da histerese. Em geral, a histerese é um tipo de janela de memória não limitada (ou seja, limitada desde a origem). Portanto, pode ser formulada matematicamente com um núcleo de convolução desde a origem. Este é um núcleo típico usado para definir operadores fracionários integrais e diferenciais, como a derivada de Caputo. A partir das fórmulas (1) - (4) é possível observar que o núcleo envolvido revela que a memória de tempos mais recentes tem mais influência do que a memória de tempos anteriores. Isso está de acordo com os sistemas epidemiológicos evolutivos [8]. Nosso estudo vai além. Ele revela que os operadores fracionários podem ser interpretados a partir da abordagem estatística, por meio da esperança matemática, onde a história passada do sistema segue uma distribuição beta. Como o parâmetro α está entre 0 e 1, os tempos recentes têm mais influência do que os tempos anteriores, nesta distribuição.

O efeito de histerese interpretado por operadores fracionários é mostrado em fórmulas (9) - (11). Mais especificamente, a taxa de variação na derivada de Caputo é explicitamente dada pela média ponderada de todas as derivadas passadas, como podemos ver na fórmula (9). Os outros operadores têm explicações semelhantes.

Desde que U tem distribuição $B(1, \alpha)$, as variáveis aleatórias assumem valores no intervalo $(0, t)$. Portanto, por (9), $J_t^\alpha f(t)$ coincide com $\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E[f(S)]$, $0 \leq s \leq t$. Claramente, $J_t^\alpha f(t)$ é afetado por todos os valores anteriores à t devido ao valor esperado $E[f(S)]$ também ser afetado. Desde que $E[f(S)]$ aparece em (10) e (12), segue que, pela mesma justificativa, $D_t^\alpha f(t)$ e $cD_t^\alpha f(t)$ também apresentam efeito de memória.

As fórmulas (9)-(11) revelam interpretações interessantes:

- 1) A integral fracionária $J_t^\alpha f(t)$ é proporcional à média ponderada de $f(s)$, considerando todos os valores s anteriores à t , distribuídos de acordo com a distribuição beta;
- 2) $D_t^\alpha f(t)$ é a soma de dois valores proporcionais às médias ponderadas das funções $f(s)$ e $f'(s)$, considerando todos os valores s anteriores à t , distribuídos de acordo com a distribuição beta;
- 3) $cD_t^\alpha f(t)$ é proporcional à média ponderada da derivada clássica $f'(s)$, considerando todos os valores anteriores s menores que t , distribuído de acordo com uma distribuição beta;
- 4) Se $\alpha = 1$, então $U \sim B(1, 1)$, isto é, U tem distribuição uniforme, logo $J_t^\alpha f(t) = tE[f(tU)] = \int_0^t f(s) ds$. Portanto, $D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} J_t^0 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$ e $cD_t^\alpha [f(t) - f(0)] = \frac{d}{dt} J_t^0 [f(t) - f(0)] = \frac{d}{dt} [f(t) - f(0)] = f'(t)$. Consequentemente, o cálculo fracionário coincide com o clássico, quando $\alpha = 1$.

Os itens 1), 2) and 3) indicam que os valores da integral fracionária, bem como das derivadas fracionárias em t , são afetados pelos valores históricos de f (a cada momento antes de t). Assim, o cálculo fracionário parece ser uma ferramenta matemática mais adequada para modelar fenômenos com histerese do que o cálculo clássico (ou seja, para o caso em que $\alpha = 1$).

3.2 Influência da distribuição Beta nos operadores de ordem α

Uma vez que cada valor histórico (antes de t) atua de forma diferente para operadores fracionários, de acordo com as distribuições $B(1, \alpha)$, $B(1, 1 - \alpha)$ e $B(2, 1 - \alpha)$, investigamos quais contribuem mais para esses operadores em relação à ordem $\alpha \in (0, 1)$.

De acordo com a fórmula (9), o valor de $J_t^\alpha f(t)$ é afetado de acordo com a densidade $f_U(u) = \frac{(1-u)^{\alpha-1}}{B(1, \alpha)}$, que cresce se $0 < \alpha < 1$ e decresce se $\alpha > 1$. Para $0 < \alpha < 1$, os valores recentes (isto é, próximos de $t \Leftrightarrow u \simeq 1$) contribuem mais para o cálculo da integral fracionária $J_t^\alpha f(t)$ em relação àqueles remotos (isto é, próximos de $0 \Leftrightarrow u \simeq 0$). Por outro lado, para $\alpha > 1$ o oposto ocorre.

Das fórmulas (10) e (11), pode-se notar que os operadores derivadas de Riemann-Liouville e Caputo têm influências semelhantes de valores anteriores de f para a integral, quando $0 < \alpha < 1$. Em particular, valores próximos de t contribuem mais para as derivadas fracionárias do que valores remotos (aqueles avaliados em tempos próximos de 0). Isso se deve ao fato de que as distribuições de densidade $f_W(w) = \frac{(1-w)^{-\alpha}}{B(1, 1-\alpha)}$ e $f_V(v) = \frac{v(1-v)^{-\alpha}}{B(2, 1-\alpha)}$ são crescentes para $0 < \alpha < 1$.

Para o operador integral, quanto maior o valor de $\alpha \in (0, 1)$ mais semelhantes são os pesos dos valores inicial e final, ou seja, mais próximo da distribuição uniforme fica a variável aleatória U . Para os operadores derivadas ocorre o oposto. Isso é ilustrado na Figura 1. Observe que a função de densidade $f_U(\cdot)$, para o parâmetro α , é igual à função de densidade $f_W(\cdot)$ para o parâmetro $1 - \alpha$. A função densidade $f_V(\cdot)$ segue o mesmo padrão que $f_W(\cdot)$, porém com aumento mais acentuado.

Em relação à integral fracionária, notamos que quanto maior o valor de α , maior é a contribuição dos valores remotos ($u \simeq 0$). Em contraste, quanto maior α , menor é a contribuição dos valores avaliados perto de t (i.e., $u \simeq 1$). Já para os operadores derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo, obtemos um comportamento oposto.

A seguir, buscamos mostrar uma vantagem do efeito da histerese na modelagem matemática.

4 Aplicação Numérica

Em [6] é feita uma comparação entre a derivada clássica e a derivada fracionária. Um modelo epidemiológico para a propagação de memes é estudado e a comparação entre o modelo sem memória (clássico) e o modelo com memória (fracionário) é feita através da análise de dados obtidos do aplicativo “Google Trends”. Utilizando a mesma metodologia, porém otimizando apenas a ordem da derivada, analisamos o meme “Minha mãe é uma peça - 2”, que se trata de um filme brasileiro.

Os valores para os parâmetros do modelo foram obtidos através de um chute inicial, de forma a aproximar a solução do modelo clássico e os dados reais. Então, considerando esses valores de parâmetros fixos, o valor da ordem da derivada otimizada foi $\alpha = 0,8849$. Assim, através do modelo fracionário obtivemos uma solução que apresenta erro menor em relação aos dados reais do que a solução do modelo clássico. Para medir o erro, consideramos a fórmula de quadrados mínimos.

Na figura 2 é possível observar o comportamento da função de infectados (solução) de ambos os modelos em relação aos dados obtidos.

O efeito de memória é maior quanto menor o valor de α e ele faz com que a curva da solução apresente um decaimento (ou crescimento, se fosse o caso) mais lento. Neste exemplo, podemos ver então como o efeito de memória contribui para uma melhor descrição do fenômeno.

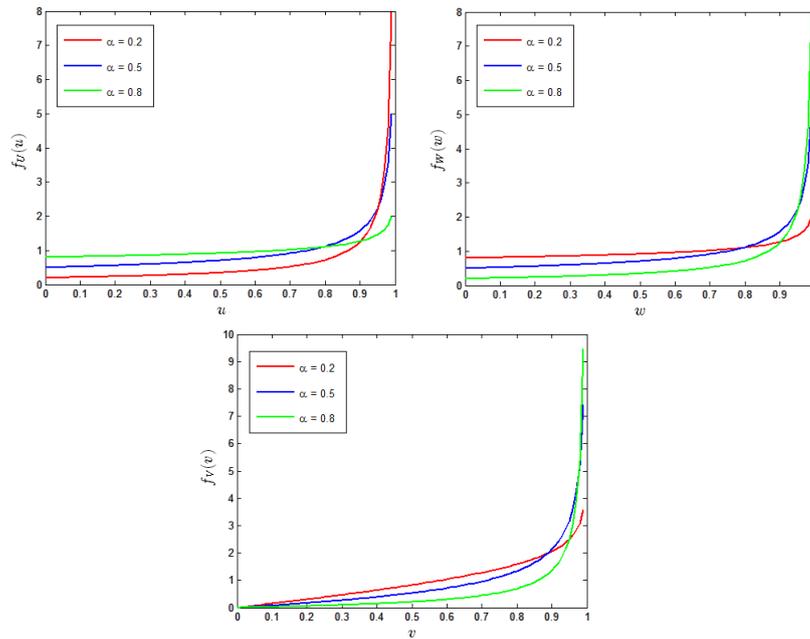


Figura 1: Funções densidade f_U , f_W e f_V , para os parâmetros $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5$ e $\alpha = 0.8$. a) mostra a distribuição de pesos históricos para integral fracionária; b) ilustra a distribuição dos pesos históricos das derivadas de Caputo e Riemann-Liouville; c) mostra a distribuição que, combinada com f_W , define os pesos históricos da derivada de Riemann-Liouville.

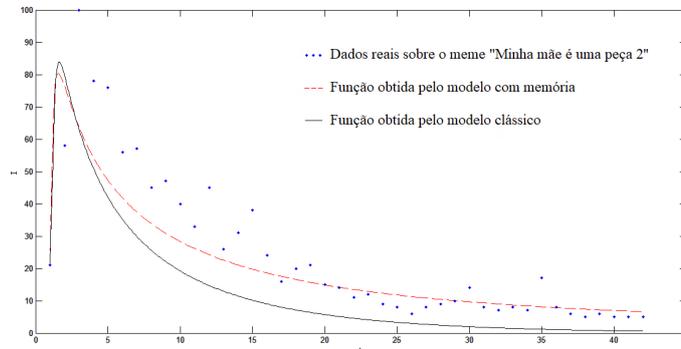


Figura 2: Comparação entre os modelos sem e com memória na descrição da propagação de um meme.

5 Conclusões

A principal vantagem do cálculo fracionário em relação ao cálculo tradicional é o efeito de memória que ele proporciona, contribuindo para uma melhor modelagem matemática. Neste trabalho, buscamos ressaltar esse aspecto do cálculo fracionário através de uma nova abordagem, exibindo o efeito de memória através da esperança estatística. Mais ainda, foi possível exibir o efeito de histerese, que é mais específico: envolve todo o passado, desde a origem.

Essa nova abordagem permite diferentes interpretações considerando-se a média da função analisada, podendo ajudar a observar melhor esse processo. Com ela também comprovamos a

perda do efeito de memória quando $\alpha = 1$ em (9) – (11), ou seja, quando retornamos ao caso clássico. Além disso, mostramos que a contribuição dos valores da função para os operadores fracionários é maior ou menor de acordo com a ordem do operador. Em particular, os valores finais da função têm maior influência sobre os valores das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo para $0 < \alpha < 1$.

Ademais, comparamos a abordagem clássica e a fracionária em um modelo de propagação de memes, mostrando que através do cálculo fracionário podemos representar com maior precisão determinados fenômenos reais.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e com apoio do CNPq sob o registro número 306546/2017-5.

Referências

- [1] Barros, L. C., Lopes, M. M., Santo Pedro, F., Esmi, E., dos Santos, J. P. C., Sánchez, D. E. The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of COVID-19. *Computational and Applied Mathematics*, 40(3), 1-21, 2021. DOI: 10.1007/s40314-021-01456-z.
- [2] Camargo, R. F., Oliveira, E. C. *Cálculo Fracionário, 1a. edição*. Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- [3] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, 1a. edição*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] Herrmann, R. Folded potentials in cluster physics—a comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46: 405203, 2013.
- [5] Li, Y., Hui-qiang, T., Hai-xiu, C. Fractional-order derivative spectroscopy for resolving simulated overlapped Lorentzian peaks, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 107: 83-89, 2011.
- [6] Lopes, M. M., Santos, J. P. C. *Dinâmica da Propagação de Memes via Sistemas com Memória*, Dissertação de Mestrado, Unifal, 2019.
- [7] Mood, A. M., Graybill, F. A. *Introduction to the Theory of Statistics, 2a. edição*. McGraw - Hill Book Company, 1974.
- [8] Saeedian, M., et al. Memory effects on epidemic evolution: The susceptible-infected-recovered epidemic model. *Physical Review* 95: 0224091-0224099, 2017. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.022409.
- [9] Silva, M. F., Machado, J. A. T., Lopes, A. M. Fractional order control of a hexapod robot, *Nonlinear Dynamics* 38: 417-433, 2004.
- [10] Teodoro, G. S., Oliveira, D. S., Oliveira, E. C. Sobre derivadas fracionárias, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40: e23071-e230726, 2018.