Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Zeros de Polinômios Palindrômicos de Grau Ímpar

Junior A. Pereira **Vanessa Botta**
Depto de de Matemática e Computação, FCT, UNESP,
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: junior.gusto@hotmail.com, botta@fctunesp.br

RESUMO

Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n$. Então P é palindrômico se $a_i = a_{n-i}$, para todo $i = 0, 1, ..., n$. O comportamento dos zeros dos polinômios palindrômicos, além de ser um interessante tópico a ser estudado, tem muitas aplicações em algumas áreas da Matemática [2, 6]. Tais zeros possuem algumas propriedades especiais, como a simetria tanto em relação à reta real quanto ao círculo unitário, por exemplo.

Atualmente, um tema que está atraindo a atenção de alguns matemáticos está relacionado à quantidade de zeros que um polinômio palindrômico possui no círculo unitário. Pesquisas recentes (ver [3, 4]) estabelecem condições para que todos os zeros de um polinômio palindrômico estejam localizados em $|z| = 1$.

Com base nos estudos de [3], apresentaremos, neste trabalho, condições necessárias e suficientes para que os zeros do polinômio palindrômico $R(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + ... + z^{n-1}) + z^n$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e n ímpar, estejam localizados no círculo unitário, ou seja, na região $|z| = 1$. Tais condições estão representadas no teorema abaixo, que será o foco principal deste trabalho, onde maiores detalhes podem ser encontrados em [1].

Teorema 1: *Os zeros do polinômio $R(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + ... + z^{n-1}) + z^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, de grau $n > 1$ ímpar, estão sobre o círculo unitário se, e somente se, $-\dfrac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \dfrac{2}{n-1}$.*

Para exemplificar, seja o polinômio $R(z) = 1 + \lambda\left(z + z^2 + z^3 + z^4\right) + z^5$. Através do Teorema 1, segue que os zeros de $R(z)$ encontram-se em $|z| = 1$ se, e somente se, $-\dfrac{1}{2} \leq \lambda \leq \dfrac{5}{2}$. A Figura 1 mostra a localização dos zeros de $R(z)$ quando $\lambda = \dfrac{9.5}{4}$. Podemos observar que os zeros de $R(z)$ encontram-se em $|z| = 1$, pois para $\lambda = \dfrac{9.5}{4}$ é satisfeita a condição do teorema. Já no caso da Figura 2, podemos observar que nem todos os zeros de $R(z) = 1 + 3\left(z + z^2 + z^3 + z^4\right) + z^5$ encontram-se em $|z| = 1$, pois a condição estabelecida através do Teorema 1 não é satisfeita.

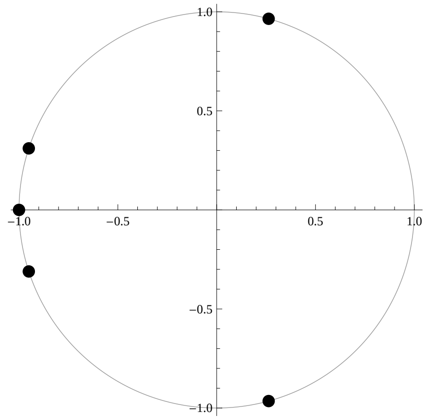

Figura 1: Zeros de
$R(z) = 1 + \frac{9.5}{4}\left(z + z^2 + z^3 + z^4\right) + z^5$.

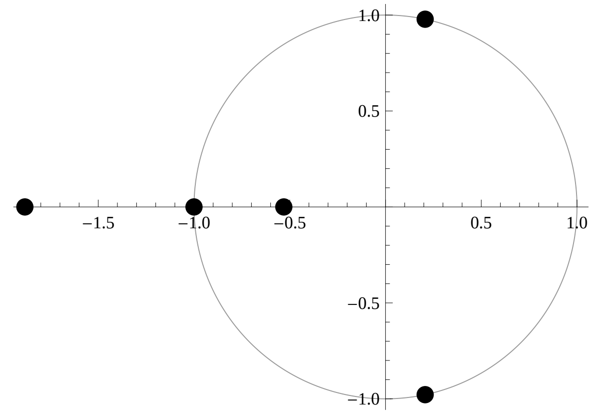

Figura 2: Zeros de
$R(z) = 1 + 3\left(z + z^2 + z^3 + z^4\right) + z^5$.

Palavras-chave: *Polinômio Palindrômico, Zeros de Polinômio, Círculo Unitário.*

Referências

[1] V. Botta, L. F. Marques, M. Meneguete, Palindromic and Perturbed polynomials: zeros location. *Acta Math. Hungar.*, 2013.

[2] L. Gemignani, V. Noferini, Modifications of Newton's method for even-grade palindromic polynomials and other twined polynomials, *Num. Algorithms*, 61 (2) (2012), pp. 315–329.

[3] D. Kwon, Reciprocal polynomials with all but two zeros on the unit circle, *Acta Math. Hung.*, 134 (4) (2011), pp. 472–480.

[4] P. Lakatos, L. Losonczi, Polynomials with all zeros on the unit circle, *Acta Math. Hung.*, 125 (4) (2009), pp. 341–356.

[5] G. V. Milovanóvic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, *World Scientific*, Singapore, 1994.

[6] M. R. Murty, C. Smyth, R. J. Wang, Zeros of Ramanujan Polynomials, *J. Ramanujan Math. Soc.*, 26 (1) (2011), pp. 107–125.

