Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Determinando a ordem das cadeias de Markov usadas na modelagem do mercado de ações

André G.C. Pereira[1]
Departamento de Matemática, UFRN, Natal, RN
Israel Smith[2]
UFRN, Natal, RN
Jaques S. Lopes[3]
Departamento de Matemática, UFRN, Natal, RN
Viviane S.M. Campos[4]
Departamento de Matemática, UFRN, Natal, RN

Resumo. Em muitos trabalhos sobre aplicação de cadeias de Markov no mercado de ações, a modelagem é feita via cadeias de primeira ordem. Muitos critérios de Informação (AIC, BIC, EDC, etc) foram desenvolvidos e dentre suas diversas aplicações uma delas é: Dado um conjunto de dados provenientes de uma cadeia de Markov, qual a ordem da cadeia de Markov que se ajusta melhor a esses dados? Os trabalhos analisados não se utilizaram de nenhum critério de seleção na determinação da ordem das cadeias utilizadas, e esse trabalho visa completar essa lacuna no estudo da aplicação das cadeias de Markov no mercado de ações.

Palavras-chave. Processos Estocásticos, Cadeias de Markov, Critérios de Informação.

1 Introdução

Em [2] é dito que as bolsas de valores são as instituições onde compra-se e/ou vende-se ações de forma sistematizada e que o único objetivo dos compradores de ações é obter lucro pelo aumento do valor das ações, entretanto existem vários diferentes motivos que podem afetar o desempenho das ações como: A tendência dos negócios à nível mundial, calamidades naturais, situação política-econômica, governança corporativa fraca, mudança nas políticas do governo, etc. [3] complementa que tais fatores induzem volatilidade aos preços. Em [4] acrescenta-se que a volatilidade de longo prazo está relacionada à fundamentos macroeconômicos associados com o fluxo de moeda e dos juros, enquanto a volatilidade de curto prazo é relativa a determinantes transitórios, tais como o sentimento do investidor.

Existem, então, vários fatores, internos/externos, público/governamental, de curto e longo prazo que podem causar mudança nos preços das ações de maneiras distintas, mesmo quando condições semelhantes estavam presentes antes das oscilações. Isso nos revela que o comportamento do preço das ações não é determinado de forma determinística, portanto a teoria de probabilidade tem que ser utilizada para o estudo deste fenômeno. Existem vários métodos estatísticos/probabilísticos que podem ser utilizados para estudar esse fenômeno de prever o preço

[1]andre@ccet.ufrn.br
[2]israelsmith2014@gmail.com
[3]jaques@ccet.ufrn.br
[4]viviane@ccet.ufrn.br

das ações usando informações passadas, como: Médias Móveis, Análise de Regressão, Modelos de Markov, Modelos de Markov Oculto, cadeias de Markov com pesos, etc. ([2]).

Um dos métodos probabilísticos que vem sendo largamente usado para prever o movimento do preço das ações é o das cadeias de Markov, conforme podemos ver em [2, 3, 5, 8, 11, 14].

A propriedade advinda dos processos Markovianos, indica que um determinado processo (estocástico) tem uma memória finita, ou alcance finito, e a determinação da ordem da cadeia de Markov explicita a magnitude desse alcance. Isto é, o quanto uma dada informação, num dado instante, depende de informações anteriores do processo. Assim, se um conjunto de dados é proveniente de uma cadeia de Markov, é fundamental a determinação da ordem desta dependência que forneça o melhor ajuste.

Fato comum nos trabalhos que analisamos é que, embora existam testes para indicar a ordem da cadeia que melhor se ajusta aos dados, nenhum deles procedeu qualquer teste.

Neste artigo usamos o preço de fechamento diário de quatro ações como nossa amostra e ilustramos como utilizar os testes (o Critério de Informação de Akaike (IC),o Critério de Informação Bayesiana (BIC) e o Critério de Determinação Eficiente (EDC)) na estimação da ordem da cadeia de Markov. Uma vez determinada a ordem da cadeia de Markov procedemos a análise de convergência da mesma a fim de encontrar a sua distribuição de equilíbrio. Este artigo está dividido em quatro seções. Na Seção 2 definimos cadeias de Markov, mostramos como encontrar a matriz de transição e como verificar se a cadeia possui distribuição de equilíbrio.Na Seção 3 apresentamos os testes mais conhecidos para estimação da ordem de uma cadeia de Markov, a saber: AIC e BIC, e aproveitamos também para apresentar um teste mais robusto que os dois primeiros, o EDC. Na Seção 4 utilizamos os dados obtidos da B3 (bolsa de valores de São Paulo) para aplicar a teoria desenvolvida nas seções anteriores.

2 Matriz de transição e distribuição de equilíbrio

Nesta seção consideramos que a ordem da cadeia já foi determinada e usamos tal ordem para determinarmos a matriz de transição da cadeia, bem como a utilizamos para efetuar a análise da convergência. Na hipótese de convergência é determinada a distribuição de equílibrio.

Para analisarmos se uma cadeia de Markov converge, precisamos relembrar algumas definições e teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas num mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde Ω é o domínio das variáveis aleatórias $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade definida em $\mathcal{F}$. $S = \{X_n(w)/w \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos valores assumidos por esse processo, é dito espaço de estados.

Definição 1 Um processo estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov de ordem $k \in \mathbb{N}$ se satisfaz a propriedade de Markov:

$$P(X_n = i_n|X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_{n-k} = i_{n-k}),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ com $n > k$ e $i_0, i_1, ..., i_n \in S$, ou seja, o presente do processo, dada toda a sua história, é condicionalmente dependente do passado através das k últimas informações. Equivalentemente, numa cadeia de Markov de ordem k, a próxima etapa é condicionalmente dependente das k últimas etapas.

Se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov de ordem 1 com espaço de estados S. Dizemos que:

$$P_{ij}^{(n-1,n)} = P(X_n = j|X_{n-1} = i), \text{ para } i, j \in S$$

é a probabilidade da cadeia sair no tempo $n - 1$ do estado i e ir para o estado j no tempo n. Chamamos essa probabilidade de probabilidade de transição da cadeia de Markov, que pode ou não depender do tempo n. Quando essa probabilidade independe do tempo em que o passo é dado, dizemos que a cadeia é Homogênea e escrevemos:

$$P_{ij} = P(X_n = j|X_{n-1} = i) = P(X_{n+k} = j|X_{n+k-1} = i)$$

para $k = -(n-1), -(n-2), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia de Markov homogênea com espaço de estados finito $S = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$. Para esta cadeia existem m^2 probabilidades de transição as quais organizamos na forma de uma matriz P, que chamamos de matriz de transição da cadeia de Markov.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

Definição 2 Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia de Markov, dizemos que do estado i a cadeia atinge o estado j se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P(X_m = j|X_0 = i) > 0$. Representamos essa situação por $i \to j$. Dizemos que a cadeia é irredutível se quaisquer que sejam $i, j \in S$ temos que $i \to j$ e $j \to i$.

Definição 3 Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia de Markov, definimos o período do estado i como sendo $d(i) = mdc\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1/P_{ii}^n > 0\}$. Se o período de todos os estados da cadeia for 1, dizemos que a cadeia é aperiódica.

Teorema 1 Toda cadeia de Markov homogênea irredutível, aperiódica com espaço de estados finito é convergente, ou seja, existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ onde $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$ é a distribuição de equilíbrio.

3 AIC, BIC e EDC

Para uma amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$, seja $L(\theta)$ denotando a função de verossimilhança parametrizada por θ e seja $d(\theta^* : \theta) = E\left\{\log \dfrac{L(\theta^*)}{L(\theta)}\right\}$ a medida de informação de Kullback-Leibler quando θ é usada para aproximar o valor verdadeiro θ^*. O estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\theta}$, a aproximação de $d(\theta^* : \theta)$ pela estatística de Neyman-Pearson junto com distribuição assintótica χ^2 da razão de máxima verossimilhança $-2\log \dfrac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$, formam a base para formulação do Critério de Informação de Akaike ([1]).

Deseja-se fazer a seleção de um modelo, onde para as hipóteses aninhadas $H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_R$, $R < \infty$, H_s representa a hipótese que o processo $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ é uma Cadeia de Markov de ordem s. Desta maneira, se o processo X assume valores em um espaço finito $S = \{1, \ldots, N\}$, [13] propôs usar AIC para selecionar a ordem e estimar a ordem verdadeira r da cadeia.

Seja $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ uma Cadeia de Markov de ordem desconhecida, mas finita, r, com $0 \leq r \leq R < \infty$. Assumimos que X toma seus valores num espaço de estados finito $S = \{1, \ldots, N\}$ e seja $P = (p_{i_1\ldots i_r:i_{r+1}})$ denotando suas probabilidades de transição,

$$P(X_n = i_n/X_k = i_k,\ k < n) = p_{i_{n-r}\ldots i_{n-1}:i_n}. \tag{1}$$

Se $r = 0$ pode ser interpretada em (1) como $p_{i_n} = p_{i_n:i_n}$.

Para $1 \leq s \leq R$ sejam as transições denotadas por

$$n_{i_1 i_2 \ldots i_s} = \sum_{k=1}^{n-s+1} I_{(X_k=i_1, X_{k+1}=i_2, \ldots, X_{k+s-1}=i_s)}.$$

e escrevamos a máxima log-verossimilhança $L_{max} = \widehat{L}$ como

$$\log \widehat{L}(s) = \sum_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}} n_{i_1\ldots i_s i_{s+1}} \log \frac{n_{i_1\ldots i_s i_{s+1}}}{n_{i_1\ldots i_s}}.$$

Se $n_{i_1\ldots i_s i_{s+1}} = 0$, assumimos $\log \frac{n_{i_1\ldots i_s i_{s+1}}}{n_{i_1\ldots i_s}} = 0$.

Para testar a hipótese de que a cadeia tem a ordem máxima s contra a hipótese de que a cadeia tenha ordem máxima r:

H_s: $p_{i_1\ldots i_s : i_{s+1}} \neq p_{i_1'\ldots i_s' : i_{s+1}}$ para algum $(i_1', \ldots, i_s') \neq (i_1, \ldots, i_s)$, o critério AIC é dado por

$$AIC(s) = -2\log \widehat{L}(s) + 2N^s(N-1),$$

onde $N = |S|$. A ordem verdadeira r pode então ser estimada por

$$\hat{r}_{AIC} = \arg \min_{0\leq s\leq R} AIC(s).$$

O termo de penalidade $2N^s(N-1)$ é o número de graus de liberdade da distribuição limite χ^2 da razão de máxima log-verossimilhança. [10] mostrou a inconsistência do estimador $\hat{r}_{AIC}$.

O Critério de Informação Bayesiana (BIC) foi proposto por [12] como uma altenativa ao AIC,

$$BIC(s) = -2\log \widehat{L}(s) + N^s(N-1)\log n,$$

onde n é o tamanho da amostra. O estimador correspondente

$$\hat{r}_{BIC} = \arg \min_{0\leq s\leq R} BIC(s).$$

é provado ser um estimador fortemente consistente, $\hat{r}_{BIC} \xrightarrow{a.s.} r$, quando o processo de Markov derivado de ordem simples $Y_n^{(r)} = (X_n, \ldots, X_{n+r-1})$ é irredutível. Posteriormente, um grande avanço foi dado por [6], que estabeleceram a consistência forte para BIC sem assumir a limitação para a ordem verdadeira r.

Um critério mais geral, que engloba os critérios AIC e o BIC, é o Critério de Determinação Eficiente (EDC), introduzido por [15],

$$EDC(s) = -2\log \widehat{L}(s) + \gamma(s)c_n,$$

com

$$\hat{r}_{EDC} = \arg \min_{0\leq s\leq R} EDC(s).$$

onde o termo de penalidade $\gamma(s)c_n$ é composto por uma função positiva e estritamente crescente $\gamma(\cdot)$ e uma sequência de contantes c_n satisfazendo

$$\frac{c_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad e \quad \frac{c_n}{\log\log n} \xrightarrow{a.s.} \infty.$$

Mais tarde, [7] propôs um estimador consistente ótimo, baseado no critério:

$$EDC_{opt}(s) = -2\log \widehat{L}(s) + 2|S|^{s+1}\log\log(n),$$

onde a escolha deste termo de penalidade torna este estimador consistente melhor quando comparado ao BIC no que se refere a velocidade de convergência para a ordem verdadeira.

3.1 Como estimar as matrizes de transição

Para fixarmos as notações, vamos supor que no experimento em estudo o espaço de estados seja $S = \{1, 2, ..., N\}$ e que $X_1, X_2, ..., X_n$ seja a amostra.

O estimador escolhido fornece a ordem da cadeia de Markov que melhor se ajusta aos dados. Por exemplo, se o estimador utilizado foi o BIC e ele indicou ordem 0 isso significa que o próximo estado é escolhido de forma independente do estado atual, e com probabilidade igual a proporção entre o número de vezes que o próximo estado apareceu na amostra e o tamanho da amostra, ou seja,

$$\hat{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \hat{P}(X_{n+1} = j) = \frac{n_j}{n},$$

onde n_j é o número de vezes que o estado j apareceu na amostra.

Se a ordem apontada pelo estimador for 1, a matriz de transição é construída conforme os artigos citados anteriomente, a saber:

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \frac{n_{ij}}{n_{i.}}, & \text{se } n_{i.} \neq 0 \\ \delta_i(j), & \text{se } n_{i.} = 0 \end{cases}$$

onde n_{ij} é o número de vezes que a sequência ij aparece na amostra e $n_{i.}$ é o número de vezes que a sequência ik aparece na amostra qualquer que seja o $k \in S$.

Quando a ordem for 2 devemos lembrar que o próximo estado depende dos 2 estados anteriores. Então seria conveniente olharmos para cada estado agora como um par, ou seja, algo do tipo ij.É como se no tempo n a cadeia estivesse no estado i e no tempo $n + 1$ a cadeia estivesse no estado j. Se no próximo tempo $n + 1$ estivermos em kp, significa que no tempo $n + 1$ a cadeia está no estado k e no tempo $n + 2$ está no estado p. Portanto, em tempos consecutivos, a cadeia ir de ij para kp só pode acontecer com probabilidade positiva se $j = k$, e portanto:

$$\hat{P}_{ij,kp} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ \frac{n_{ijp}}{n_{ij.}} & \text{se } j = k \text{ e } n_{ij.} \neq 0 \\ \delta_{ij}(kp) & \text{se } n_{ij.} = 0 \end{cases}$$

onde n_{ijp} é o número de vezes que a sequência ijp aparece na amostra, $n_{ij.}$ é o número de vezes que a sequência ijk, para qualquer $k \in S$, aparece na amostra e $\delta_{ij}(kp)$ é a função característica que resulta 1 se $ij = kp$ e em 0 caso contrário.

E o processo segue de maneira análoga qualquer que seja a ordem indicada pelo estimador.

Quando a ordem for zero não temos uma cadeia de Markov, visto que o próximo passo não depende do anterior, o processo já se move como se estivesse em equilíbrio e a distribuição de equilíbrio é a própria proporção calculada no início.

Nos outros casos temos uma matriz de transição e o procedimento para analisarmos a convergênica é sempre o mesmo: devemos verificar se a cadeia é irredutível, aperiódica e finita. Se essas condições forem satisfeitas, então teremos uma distribuição de equilíbrio conforme o Teorema 1.

4 Exemplos numéricos

Nesta seção usamos os preços de fechamento das ações GOLL4,CIEL3,JBSS3,ABEV3 obtidos do site yahoo finance de todo o ano de 2018, num total de 245 amostras para cada ação. Da mesma forma que é feito nas referências citadas, usamos os preços para determinar a variação diária do preço da ação, obtendo a sequência dos retornos diários. Assim, se P_n é o preço da ação no n-ésimo dia, o seu rendimento nesse dia foi $R_n = (P_n - P_{n-1})/P_{n-1}$ e é esse rendimento que vai ser modelado pela cadeia de Markov. Neste trabalho, para discretizar o modelo, dividimos os

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0396

rendimentos em faixas e cada faixa recebe um número, assim usando a sequência R_n obtemos uma outra sequência discreta D_n da seguinte forma.
Se $R_n \geq 2,5\% \Rightarrow D_n = 1$
Se $1,5\% \leq R_n < 2,5\% \Rightarrow D_n = 2$
Se $0,5\% \leq R_n < 1,5\% \Rightarrow D_n = 3$
Se $-0,5\% \leq R_n < 0,5\% \Rightarrow D_n = 4$
Se $-1,5\% \leq R_n < -0,5\% \Rightarrow D_n = 5$
Se $-2,5\% \leq R_n < -1,5\% \Rightarrow D_n = 6$
Se $R_n < -2,5\% \Rightarrow D_n = 7$

A sequência a ser analisada é $\{D_n\}$, com $\{D_n\}$ discreta e com espaço de estados $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Notando que D_n tem dependência dos valores anteriores via P_n, desejamos saber qual o tamanho da dependência que essa sequência possui, ou seja, qual ordem melhor ajusta essa dependência. Utilizando os testes descritos na Seção 2 e calculando os estimadores, obtivemos as seguintes tabelas:

Tabela 1: Companhia aéria GOLL

Ordem	AIC	BIC	EDC
0	402.14	404.47	395.43
1	456.97	473.32	410.04
2	863.61	978.02	535.08
3	4217.02	5017.92	1917.35
4	28825.24	34431.57	12727.62

Tabela 2: Companhia de cartões CIELO

Ordem	AIC	BIC	EDC
0	419.28	421.61	412.57
1	468.99	485.34	422.06
2	853.93	968.34	525.41
3	4189.91	4990.82	1890.25
4	28828.86	34435.18	12731.23

Tabela 3: Frigorífico JBS

Ordem	AIC	BIC	EDC
0	422.19	424.52	415.48
1	473.22	489.56	426.28
2	847.16	961.58	518.64
3	4195.49	4996.40	1895.83
4	28830.06	34436.39	12732.43

Tabela 4: Cervejaria AMBEV

Ordem	AIC	BIC	EDC
0	362.56	364.89	355.85
1	420.63	436.98	373.69
2	842.49	956.91	513.97
3	4251.03	5051.93	1951.37
4	28864.09	34470.42	12766.46

5 Conclusões

Vimos neste trabalho que quando aplicado os estimadores de ordem para determinar a ordem de dependência entre os retornos diários das ações, os três estimadores utilizados AIC, BIC e EDC, nos mostraram que a ordem foi zero, ou seja, que não existe uma dependência entre os retornos atuais com os retornos passados e que a dinâmica dos preços seguem a proporção do comportamento passado. Motiva-nos, investigar, em trabalhos vindouros, o que acontece com essa dependência quando considerados retornos semanais e mensais, ao invés dos retornos diários tratados no presente trabalho. Adicionalmente, uma análise num conjunto de ações mais amplo, em intervalo de observação maior (ou menor), separada por setores, se fizesse necessária a fim de verificar se a ausência de dependência percebida neste trabalho é geral ou setorial.

Agradecimento

Agradecemos ao Departamento de Matemática da UFRN que nos proporcionou a infra-estrutura para a realização deste trabalho, bem como aos pareceristas cujos apontamentos tornaram melhor nosso texto.

Referências

[1] Akaike,H. , *A New Look at the Statistical Model Identification*, IEEE Trans. Autom. Cont., 19, 716-723, 1974.

[2] Bhusal, M.K., Application of Markov Chain Model in the Stock Market Trend Analysis of Nepal , *International Journal of Scientific & Engineering Research* Volume 8, Issue 10, October-2017,ISSN 2229-5518 .

[3] Cechin, R.B. e Corso,L.L. , *High-order Multivatiate Markov Chain Applied in Dow Jones and Ibovespa Indexes*, Pesquisa Operacional 39(1):205-223,2019. ISSN 0101-7438.

[4] Chiu, C.W.J., Harris R., Stoja, E. e Chin M., Financial market volatility, macroeconomic fundamentals and investor sentiment., *Journal of Banking & Finance*, 92: 130–145,2018.

[5] Choji, D.N., Eduno, S.N., Kassem, G.T., Markov Chain Model Application on Share Price Movement in Stock Market: *Journal of Computer Engineering and Intelligent Systems.* www. iiste.org, Vol.4, No. 10; 2013.

[6] Csiszár,I. & P. C. Shields, *The Consistency of the BIC Markov Order Estimator*, Ann. Statist., **28**, no. 6, 1601-1619, 2000.

[7] Dorea,C. C. Y. , *Optimal Penalty Term for EDC Markov Chain Order Estimator*, Annales de l'ISUP, 52, 15-26, 2008.

[8] Doubleday, K.J. e Esunge, J.N. , Application of Markov Chains to Stock Trends,*Journal of Mathematics and Statistics* 7 (2): 103-106, 2011 . ISSN 1549-3644.

[9] Isaacson, D.L. e Madsen,R.W. , 1985. *Markov Chains: Theory and Applications. 1st Edn.*, R.E. Krieger Pub. Co., New York, ISBN-13: 9780898748345.

[10] Katz, R. W. ,*On Some Criteria for Estimating the Order of Markov Chain*, Technometrics, 23, 243-249, 1981.

[11] Mettle F.O., Boi,Q.E.N. , Laryea, R.A., *A Methodology for Stochastic Analysis of Share Price of Markov Chains with Finite States*: SpringerPlus, doi: 10.1186/2193-1801-3-657; 2014.

[12] Schwarz,G. , *Estimating the Dimension of a Model*, Ann. Statist., 6, 461-464, 1978.

[13] Tong,H. , *Determination of the Order of a Markov Chains by Akaike's Information Criterion*, J. App. Probab., 12, 488-497, 1975.

[14] Zhang D., Zhang X., Study on Forecasting the Stock Market Trend Based on Stochastic Analysis Method: *International Journal of Business and Management.* Vol. 4, No. 6. June; 2009.

[15] Zhao,H. C. , Dorea,C. C. Y. e Gonçalves,C. R. , *On Determination of the Order of a Markov Chains*, Stat. Infer. for Stoc. Processes, 4, 273-282, 2001.

