

Avanços no estudo da dinâmica do rotor duplo pulsado

Priscilla A. Sousa-Silva¹

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Câmpus de São João da Boa Vista - UNESP, São João da Boa Vista, SP

Luiz A. DePaula²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus São João da Boa Vista - IFSP, São João da Boa Vista, SP

Henrique F. Cherulli³

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Câmpus de São João da Boa Vista - UNESP, São João da Boa Vista, SP

Resumo. O rotor duplo pulsado é um exemplo clássico de um sistema dinâmico com comportamento caótico. O modelo matemático que descreve esse sistema mecânico é dado por quatro equações acopladas a tempo discreto. Neste trabalho, discutimos avanços recentes no estudo da dinâmica do rotor duplo pulsado, dando um passo na direção de uma investigação multiparamétrica extensiva. Em particular, examinamos longos transientes que ocorrem após crises de fronteira de atratores caóticos e como eles afetam uma investigação completa do sistema.

Palavras-chave. Multi-estabilidade, Transiente caótico, Crise de fronteira, Rotor duplo pulsado

1 Introdução

O rotor duplo pulsado (KDR, do inglês *kicked double rotor*) é um sistema mecânico simples formado por duas barras finas de massas desprezíveis que giram em torno de um pivô fixo [3, 6], conforme o diagrama da Figura 1. A primeira barra tem comprimento l_1 e está anexada em uma das suas extremidades ao pivô fixo no ponto O e na outra extremidade ao ponto O' localizado no ponto médio da segunda barra que tem comprimento $2l_2$. O movimento do sistema está restrito ao plano horizontal e há atrito nos pivôs em O e O' . Uma massa m_1 é anexada em O' e massas $m_2/2$ são anexadas em cada uma das extremidade da segunda barra. Uma das extremidades da segunda barra recebe impulsos periódicos de intensidade ρ constante sempre na mesma direção nos instantes $t = T, 2T, 3T, etc.$

As equações que descrevem o estado do sistema imediatamente após a aplicação do forçante podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\theta_1^{(k+1)} &= \theta_1^{(k)} + M_{11}\dot{\theta}_1^{(k)} + M_{12}\dot{\theta}_2^{(k)} \\ \theta_2^{(k+1)} &= \theta_2^{(k)} + M_{21}\dot{\theta}_1^{(k)} + M_{22}\dot{\theta}_2^{(k)} \\ \dot{\theta}_1^{(k+1)} &= \frac{\rho l_1}{I_1} \text{sen}\theta_1^{(k+1)} + L_{11}\dot{\theta}_1^{(k)} + L_{12}\dot{\theta}_2^{(k)} \\ \dot{\theta}_2^{(k+1)} &= \frac{\rho l_2}{I_2} \text{sen}\theta_2^{(k+1)} + L_{21}\dot{\theta}_1^{(k)} + L_{22}\dot{\theta}_2^{(k)},\end{aligned}\tag{1}$$

¹priscilla.silva@unesp.br.

²luiziagusp@gmail.com

³henrique.cherulli@unesp.br

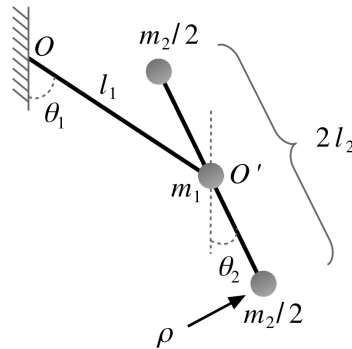


Figura 1: Representação esquemática do rotor duplo pulsado formado por duas barras de massas desprezíveis de comprimentos l_1 e $2l_2$ e três massas anexadas nas extremidades livres das barras. A seta indica o ponto de aplicação de um forçante externo impulsivo de intensidade ρ .

nas quais θ_1 e θ_2 descrevem as posições angulares de cada barra e $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ denotam as velocidades angulares de cada barra, com as variáveis θ_1 e θ_2 moduladas no intervalo $[0, 2\pi]$. Os parâmetros $I_1 = (m_1 + m_2)l_1^2$ e $I_2 = m_2l_2^2$ correspondem aos momentos de inércia de cada barra e M_{ij} e L_{ij} são termos de matrizes constantes dados por

$$L = \sum_{i=1}^2 W_i e^{\lambda_i T}, \quad M = \sum_{i=1}^2 W_i \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu_1}{\Delta} \right), \quad b = -\frac{\nu_2}{\Delta}, \quad d = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu_1}{\Delta} \right), \quad (2)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 \pm \Delta), \quad \Delta = \sqrt{\nu_1^2 + 4\nu_2^2}.$$

O mapa dado pelo sistema de equações (1) é uma extensão quadridimensional do rotor simples, conhecido como Mapa Padrão [5], e tem diversos aspectos da sua dinâmica explorados na literatura. Em particular, a estrutura e a dimensão de incerteza das bacias de atração do KDR, bem como a forte multiestabilidade do sistema, foram investigadas para alguns valores selecionados dos parâmetros $\nu_{1,2}$ e ρ [2, 3]. O KDR também foi utilizado como laboratório dinâmico para testar esquemas de controle de caos, mostrando que é possível estabilizar pontos fixos instáveis embebidos em atratores caóticos do sistema [2, 6]. Por fim, o KDR foi empregado para estudar sincronização de sistemas caóticos [8] e para exemplificar o cálculo de aproximações numéricas de conjuntos invariantes não atrativos conhecidos como selas caóticas [4, 7]. No entanto, uma investigação multiparamétrica abrangente desse sistema ainda não foi realizada. Isso se deve, principalmente, ao fato de que a alta dimensionalidade do mapa e o comportamento dinâmico extremamente intrincado e variado constituem um grande desafio para uma investigação numérica extensiva.

Neste trabalho, refinamos e estendemos resultados anteriores sobre o mapa. Especificamente, utilizando uma abordagem fenomenológica, investigamos a multiestabilidade do sistema e detectamos longos transientes caóticos após crises que não haviam sido identificadas previamente.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos diagramas de bifurcação considerando dois regimes dinâmicos distintos. A seguir, na Seção 3, caracterizamos os regimes observados nos diagramas de bifurcação considerando expoentes de Lyapunov, multiestabilidade e tempos característicos da dinâmica. Concluimos com as considerações finais na Seção 4.

2 Diagramas de bifurcação

O KDR apresenta uma variedade de regimes dinâmicos que podem ser observados utilizando diagramas de bifurcação para diferentes intervalos do parâmetro forçante. Nesta seção, apresentamos diagramas de bifurcação considerando dois regimes dinâmicos com características distintas. Todos os resultados são apresentados para os parâmetros físicos fixos $T = 1$, $l_1 = 1/\sqrt{2}$, $l_2 = 1$ e $m_1 = m_2 = 1$, permitindo a variação de $\nu_{1,2}$ e ρ , com $\nu_1 = \nu_2 = \nu \in (0, 1]$ e $\rho \in (0, 7.5]$.

Iniciamos analisando o regime fortemente dissipativo no caso limite $\nu = 1$. Neste caso, a dinâmica assintótica varia consideravelmente a medida que a intensidade do forçante aumenta. De fato, conforme visto no diagrama de bifurcação da Figura 2, quando $\rho \gtrsim 0$ o sistema conta com um único ponto fixo estável, enquanto que a medida que ρ aumenta, surgem algumas soluções periódicas atrativas e, eventualmente, atratores caóticos.

O diagrama de bifurcação da Figura 2 foi obtido evoluindo 5×10^3 condições iniciais para cada valor de $\rho \in (0, 7.5]$, com $\Delta\rho = 4 \times 10^{-3}$. Os pontos vermelhos correspondem a 2.5×10^3 pares de (θ_1, θ_2) em uma grade quadrada com $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi)$, $\Delta\theta_{1,2} = 2\pi/50$ e $\dot{\theta}_{1,2} = 0$, isto é, velocidade inicial nula. Para cada condição inicial são plotadas as cinco iterações finais após um transiente de 10^4 iterações. Observando-se os pontos vermelhos no diagrama, nota-se que a dinâmica assintótica do sistema é dominada por um ponto fixo estável até $\rho = \pi$, quando orbitas periódicas surgem através de bifurcações sela-nó e sofrem sucessivas duplicações de período, evoluindo para o caos. Logo em seguida, o ponto fixo também bifurca até dar origem a um atrator caótico de duas bandas que, aparentemente, se unem em um grande atrator caótico quando $\rho \geq 6.856$. Esse resultado corresponde ao descrito na Ref. [6] (ver Figura 8).

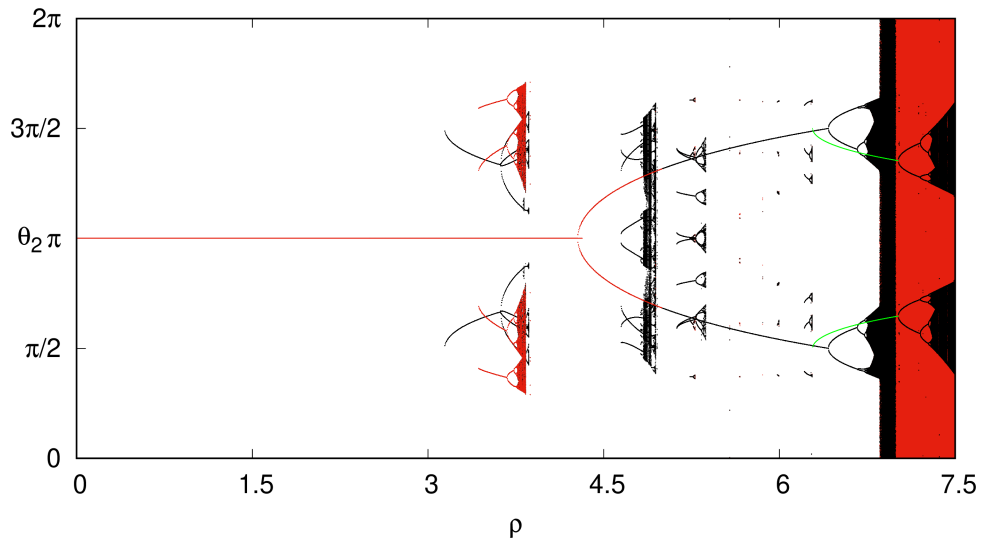


Figura 2: Diagrama de bifurcação para $\nu = 1$ e $\rho \in (0, 7.5]$, com $\Delta\rho = 4 \times 10^{-3}$. Os pontos vermelhos correspondem a trajetórias com velocidade inicial nula e transiente de 10^4 iterações. Já os pontos pretos correspondem a trajetórias com velocidades iniciais não nulas, com $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 10$, e transientes de 10^4 , 10^9 e 10^6 iterações para $\rho \in [5, 6.8)$, $\rho \in [6.8, 7.2)$ e $\rho \in [7.2, 7.5]$, respectivamente. Por fim, os pontos verdes mostram a evolução de dois pontos fixos simétricos que surgem em uma bifurcação sela-nó quando $\rho = 2\pi$.

No entanto, além desses estados assintóticos já conhecidos, neste trabalho detectamos estados assintóticos adicionais que não haviam sido relatados previamente. Estas novas soluções são mostradas pelos pontos pretos da Figura 2 e correspondem às interações finais de trajetórias geradas

a partir de 2.5×10^3 condições iniciais com os mesmos pares (θ_1, θ_2) utilizados anteriormente, mas com velocidade inicial não nula. Especificamente, os valores de $\dot{\theta}_{1,2}$ foram determinados aleatoriamente com $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 10$, para cada par (θ_1, θ_2) . Ou seja, além do ramo principal que sofre uma cascata de duplicação de período para o caos, vemos que existem ramos adicionais de soluções que também evoluem para pequenos atratores caóticos de várias bandas. Esses ramos, que não foram detectados em trabalhos prévios devido às restrições impostas nas velocidades iniciais, se originam em órbitas periódicas que aparecem em bifurcações do tipo sela-nó e eventualmente desaparecem quando os pequenos atratores caóticos sofrem crises mediadas por órbitas periódicas instáveis nas fronteiras de suas bacias de atração.

Além disso, na região $\rho \in [5.0, 7.5]$ da Figura 2 os pontos vermelhos mostram que, aparentemente, o ramo principal do diagrama evolui para um grande atrator caótico que aparece em $\rho \approx 6.856$ e domina a dinâmica para valores maiores do forçante. No entanto, ao descartar um transiente maior, é possível visualizar a estrutura subjacente mostrada pelos pontos pretos. Esses pontos correspondem às iterações finais de 625 condições iniciais com os mesmos pares $\theta_{1,2}$ usados para os pontos vermelhos, mas com valores iniciais de $\dot{\theta}_{1,2}$ aleatórios, com $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 10$. Antes de plotar os pontos pretos descartamos 10^4 iterações transientes para $\rho \in [5, 6.8)$, 10^9 para $\rho \in [6.8, 7.2)$ e 10^6 para $\rho \in [7.2, 7.5]$. Com isso, agora é possível observar novos estados assintóticos após uma crise que ocorre quando $\rho \approx 6.856$.

Por fim, um par de pontos fixos simétricos que surgem em uma bifurcação sela-nó quando $\rho = 2\pi$ é mostrado em verde na Figura 2. Essas soluções estáveis também sofrem uma cascata de duplicações de período a medida que ρ aumenta e dão origem a dois atratores caóticos que não haviam sido detectados em trabalhos anteriores.

Assim, concluímos que os pontos vermelhos com valores de θ_2 estendendo-se de $\theta_2 = 0$ a $\theta_2 = 2\pi$ quando $6.856 \lesssim \rho \lesssim 6.996$ são, na verdade, soluções transientes que vão para um dos dois pontos fixos em verde quando o número de iterações tende a infinito. Esses longos transientes implicam em tempos computacionais elevados para a obtenção dos diagramas de bifurcação, mesmo utilizando computação paralela em GPU, como foi o caso neste trabalho.

É importante ressaltar que, para os valores dos parâmetros considerados, não é realmente necessário iterar um número muito grande de condições iniciais como o utilizado para gerar o diagrama da Figura 2. No entanto, uma vez que este trabalho faz parte de uma investigação exploratória do espaço de parâmetros, esse número foi inicialmente padronizado para lidar com uma gama extensa de pares (ρ, ν) . Ao contrário do que ocorre no caso unidimensional, sistemas com espaço de fases multidimensionais, em geral, podem apresentar diversos estados assintóticos coexistentes. Assim, são necessárias condições iniciais nas diferentes bacias de atração para visualizar de forma adequada a evolução do sistema. Conforme veremos mais adiante, sabe-se que milhares de atratores periódicos podem coexistir para alguns valores de ρ quando $\nu \rightarrow 0$ no espaço de fases do KDR e que alguns deles tem bacias muito pequenas [2]. Assim, escolhemos um número de condições iniciais elevado para garantir uma cobertura razoável do espaço de fases a medida que os parâmetros foram variados. No entanto, a escolha desse valor deve ser criteriosa, pois quanto maior o número de condições iniciais escolhidas, maior será o tempo computacional consumido, principalmente quando for necessário considerar transientes muito elevados [1].

O segundo caso analisado neste trabalho refere-se ao sistema fracamente dissipativo com valores moderados de ρ . Nesse caso, a característica predominante da dinâmica é a coexistência de múltiplas soluções periódicas estáveis de baixo período que eventualmente se transformam em pequenos atratores caóticos que persistem no espaço de parâmetros por intervalos muito estreitos de ρ . Para exemplificar este caso, a Figura 3 ilustra o comportamento multi estável do sistema para $\nu = 0.2$. O diagrama de bifurcação foi obtido plotando os cinco pontos finais após 10^7 iterações do mapa de 625 trajetórias com condições iniciais dadas por pares equidistantes de (θ_1, θ_2) e $\dot{\theta}_{1,2}$ aleatórias, com $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi)$ e $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 10$ para $\rho \in (0, 7.5]$ e $\Delta\rho = 0.012$. Vemos que, tipicamente,

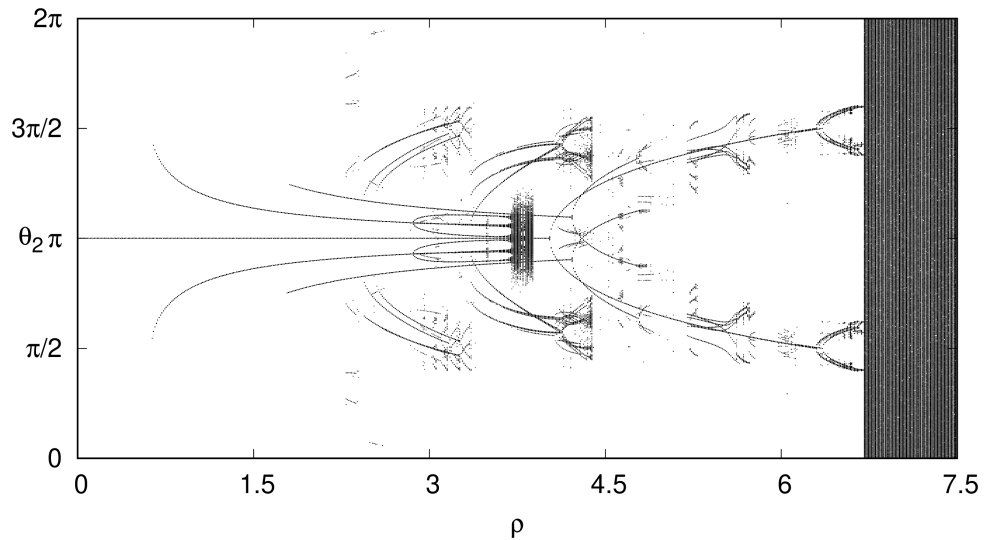


Figura 3: Diagrama de bifurcação para $\nu = 0.2$ e $\rho \in (0, 7.5]$, com $\Delta\rho = 0.012$ e transiente de 10^7 iterações. Para cada ρ são iteradas 625 trajetórias a partir de posições iniciais equiespaçadas no plano (θ_1, θ_2) e velocidades iniciais aleatórias, com $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi)$ e $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 10$.

o número de soluções periódicas estáveis coexistentes é maior que no caso de $\nu = 1$. Por exemplo, quando $\rho = 3.5$ e $\nu = 1$, o ponto fixo do ramo principal coexiste com dois atratores periódicos de período 2 e um atrator de período 4. Por outro lado, quando $\rho = 3.5$ e $\nu = 0.2$ há 36 soluções coexistentes: 15 pontos fixos, cinco atratores de período 2, seis de período 3, seis de período 4, dois de período 8 e dois de período 12. Além desses atratores periódicos, também identificamos dois atratores quase-periódicos simétricos de 12 bandas que não haviam sido anteriormente detectados e que serão explorados em contribuições futuras.

Vale notar que as curvas observadas nas Figuras 2 e 3 correspondem a projeções bidimensionais de soluções em um espaço quadridimensional, de forma que aparentemente ocorrem superposições de soluções. No entanto, esse efeito visual não implica no cruzamento de soluções no espaço de fases.

3 Caracterização da dinâmica

Nesta seção discutimos algumas características da dinâmica nos dois regimes discutidos na Seção 2. A fim de identificar a ocorrência de soluções caóticas, iniciamos calculando o máximo expoente de Lyapunov em um conjunto representativo de trajetórias com velocidades iniciais aleatórias para $\rho \in [5, 7.5]$ e $\nu = 1$. A Figura 4 mostra o maior valor do máximo expoente de Lyapunov em um conjunto de 625 trajetórias com condições iniciais aleatórias para cada valor de ρ , indicando a ocorrência de dinâmica caótica intercalada com extensas regiões de periodicidade. Notamos que um número de iterações transiente adequado deve ser descartado para obter os expoentes de Lyapunov e que o valor necessário torna-se muito elevado quando $6.856 \lesssim \rho \lesssim 7.002$, imediatamente após a crise de fronteira que destrói o atrator do ramo principal.

Para ter uma ideia do aumento dos tempos característicos do sistema, considere o caso com $\rho = 6.99$ e $\nu = 1$. Nossa investigação prévia mostrou que os únicos estados assintóticos presentes são dois pontos fixos com coordenadas $P_1 = (\pi, 2.02438121, 5.81964141, 16.1939614)$ e $P_2 = (\pi, 4.25880409, -5.81964141, -16.1939614)$. Para identificar o tempo característico que tra-

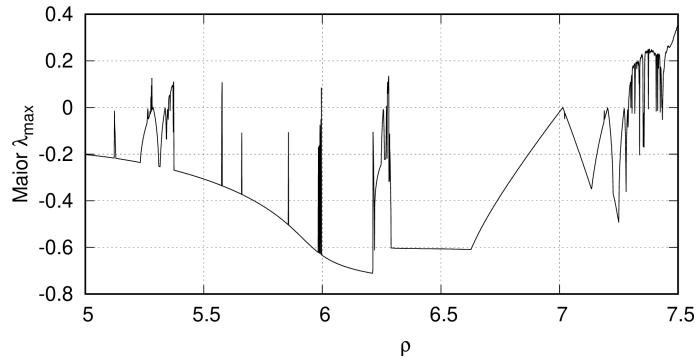


Figura 4: Maior expoente de Lyapunov máximo para $\nu = 1$ e $\rho \in [5, 7.5]$. Para cada ρ , calculou-se o λ_{max} de 625 trajetórias com condições iniciais aleatórias e plotou-se o maior valor do conjunto.

jetórias do sistema demoram para atingir $P_{1,2}$, iteramos 625 trajetórias com condições iniciais aleatórias e registramos o número de iterações até alcançar uma bola de raio menor que 10^{-8} unidades do mapa em torno de uma das soluções. Os resultados apresentados na Tabela 1 mostram que mais de 97% das trajetórias requerem mais de 10^7 iterações. Em particular, 66,08% das trajetórias apresentam um transiente de 10^8 a 10^9 iterações para alcançar o estado assintótico correspondente, enquanto que 18,24% tem um tempo transiente maior que 10^9 iterações.

Tabela 1: Porcentagem de trajetórias com transiente entre $0-10^3$ e 10^9-10^{10} iterações para $\nu = 1$ e $\rho = 6.99$.

$n_{\text{iterações}}$	$0-10^3$	10^3-10^4	10^4-10^5	10^5-10^6	10^6-10^7	10^7-10^8	10^8-10^9	10^9-10^{10}
%	1.12	0	0	0.16	1.60	12.80	66.08	18.24

A ocorrência de transientes muito longos também é uma característica evidente no caso fracamente dissipativo mostrado na Figura 3, especialmente em $\rho \gtrsim 3.3$ e $\rho \gtrsim 6.7$. Esses longos transientes ocorrem devido a crises de fronteira nas quais um ou mais pequenos atratores caóticos de várias bandas desaparecem ao colidir com órbitas periódicas instáveis nas fronteiras de suas bacias. Contudo, a característica dinâmica mais importante nesse regime é a multiestabilidade.

Considere, por exemplo, o caso com $\nu = 0.01$ e $\rho = 3.5$. A Tabela 2 mostra o número n de atratores de período P identificados para esse par de parâmetros. No total, detectamos 6960 órbitas periódicas estáveis com período menor ou igual a 24. Além das soluções mostradas na Tabela 2 encontramos outros 114 estados assintóticos com período maior que 24, sendo o maior período detectado igual a 108. Para obter a contagem da Tabela 2 utilizamos 10^6 pares de $\theta_{1,2}$ em uma grade quadrada de $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi)$ e valores aleatórios de $\dot{\theta}_{1,2}$, com $|\dot{\theta}_{1,2}| \leq 200$.

Tabela 2: Número (n) de atratores de período P detectados para $\nu = 0.01$ e $\rho = 3.5$.

P	1	2	3	4	5	6	8	10	12	13	15	16	18	21	24
n	2032	45	2459	931	90	14	8	58	1006	15	143	100	1	2	56

É importante destacar que o número de atratores obtido é, na verdade, um limite inferior da quantidade total de soluções periódicas estáveis coexistentes, pois estados assintóticos com bacias de atração muito pequenas podem não ser detectados devido à resolução limitada da grade. Entretanto, grades muito finas resultam em tempos computacionais extremamente elevados para a

detecção, identificação e contagem de estados assintóticos coexistentes no caso de forte multiestabilidade. Assim, a investigação extensiva deste sistema depende da avaliação cuidadosa da relação tempo-acurácia das explorações numéricas realizadas.

4 Considerações finais

Neste trabalho investigamos a dinâmica de um mapa quadridimensional que modela um sistema mecânico conhecido como rotor duplo pulsado, refinando e estendendo resultados obtidos anteriormente na literatura. Especificamente exploramos dois regimes dinâmicos distintos, construindo diagramas de bifurcação e caracterizando a dinâmica em termos dos expoentes de Lyapunov, dos longos transientes que aparecem após crises de atratores e da multiestabilidade do sistema.

Agradecimentos

Ao CNPq (processo 422282/2018-9) e à FAPESP (processos 2018/00059-9 e 2018/25001-3) pelo apoio financeiro. À CAPES por manter o *Portal de Periódicos* e à UNESP por proporcionar acesso a essa plataforma e pelo apoio institucional.

Referências

- [1] Cherulli, H. F. e Sousa-Silva, P. A. Investigando a Dinâmica do Rotor Duplo Pulsado: um laboratório dinâmico para sistemas caóticos discretos com espaço de fase 4D, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43:e20210008, 2021. DOI:10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0008.
- [2] Feudel, U., Grebogi, C., Poon, L. e Yorke, J. Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors, *Chaos, Solitons & Fractals*, 9:171-180, 1998. DOI:10.1016/S0960-0779(97)00058-1.
- [3] Grebogi, C., Kostelich, E., Ott, E. e Yorke, J. Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: Basin structure of the kicked double rotor, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 25:347-3602, 1987. DOI:10.1016/0167-2789(87)90108-4.
- [4] Moresco, P. e Dawson, S. P. The PIM-simplex method: an extension of the PIM-triple method to saddles with an arbitrary number of expanding directions, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 126:38-48, 1999. DOI:10.1016/S0167-2789(98)00234-6.
- [5] Ott, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. e Dayawansa, W. P. Controlling chaotic dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58:165-192, 1992. DOI:10.1016/0167-2789(92)90107-X.
- [7] Sweet, D., Nusse, H. E., e Yorke, J. Stagger-and-Step Method: Detecting and Computing Chaotic Saddles in Higher Dimensions, *Physical Review Letters*, 86:2261-2264, 2001. DOI:10.1103/PhysRevLett.86.2261.
- [8] Tonelli, R., Lai, Y. C. e Grebogi, C. Feedback Synchronization Using Pole-Placement Control, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10:2611-2617, 2000. DOI:10.1142/S0218127400001675.