Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Fórmula do tipo Mehler–Heine para uma classe de polinômios hipergeométricos generalizados*

Cleonice F. Bracciali†
Depto de Matemática Aplicada, UNESP - Univ. Estadual Paulista
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: cleonice@ibilce.unesp.br

Juan José Moreno-Balcázar‡
Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería
Almería, Espanha
E-mail: balcazar@ual.es

RESUMO

Consideramos séries hipergeométricas generalizadas (ver, por exemplo, [1])

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \\ b_0, b_1, \ldots, b_{q-1} \end{matrix}; z\right) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_0)_i \cdots (a_{p-1})_i}{(b_0)_i \cdots (b_{q-1})_i} \frac{z^i}{i!}, \tag{1} $$

onde p e q são inteiros positivos, b_j não podem ser nulos ou inteiros negativos, para $j = 0, 1, \ldots, q-1$, e $(\cdot)_j$ denota o símbolo de Pochhammer dado por

$$ (c)_j = \prod_{k=0}^{j-1} (c+k), \quad (c)_0 = 1. $$

Note que, se algum $a_j = -n$, então a série (1) torna-se um polinômio de grau no máximo n.

Vamos utilizar as seguintes notações: $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, $b_0 = b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $a_0 = -n$ e

$$ \begin{aligned} \alpha_{\mathbf{n}} &:= (k_1 n + \ell_1, \ldots, k_{p-1} n + \ell_{p-1}), \quad \text{para} \quad p \geq 2, \\ \beta_{\mathbf{n}} &:= (s_1 n + t_1, \ldots, s_{q-1} n + t_{q-1}), \quad \text{para} \quad q \geq 2, \end{aligned} $$

onde $k_j > 0$ (resp. $s_j > 0$) e $k_j n + \ell_j$ (resp. $s_j n + t_j$) não podem ser nulos ou inteiros negativos, para $j = 1, 2, \ldots, p-1$ (resp. $j = 1, 2, \ldots, q-1$). Essas hipóteses garantem que (1) é um polinômio de grau exatamente n.

Assim consideramos a classe de polinômios hipergeométricos generalizados dada por

$$ {}_pF_q(-n, \alpha_{\mathbf{n}}; b, \beta_{\mathbf{n}}; z) := {}_pF_q\left(\begin{matrix} -n, k_1 n + \ell_1, \ldots, k_{p-1} n + \ell_{p-1} \\ b, s_1 n + t_1, \ldots, s_{q-1} n + t_{q-1} \end{matrix}; z\right), \tag{2} $$

onde $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Observe que se $p = 1$ (resp. $q = 1$), então $\alpha_{\mathbf{n}}$ (resp. $\beta_{\mathbf{n}}$) não aparece na expressão de ${}_pF_q$, por exemplo para $p = 1$ e $q = 1$ temos o polinômio ${}_1F_1(-n; b; z)$.

*Pesquisa desenvolvida no programa "Research in Pairs" do Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
†apoio do CNPq, FUNDUNESP e FAPESP, Brasil.
‡apoio do Ministerio de Ciencia e Innovación, Espanha e ERDF, projeto MTM2011-28952-C02-01, e da Junta de Andalucía, Espanha, Grupo de Pesquisa FQM–0229 (Campus de Excelência Internacional CEI–MAR) projeto P09–FQM–4643.

Para essa classe de polinômios hipergeométricos generalizados obtemos uma fórmula tipo Mehler-Heine, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} {}_pF_q\left(-n, \alpha_{\mathbf{n}}; b, \beta_{\mathbf{n}}; \frac{z}{n^{p-q+1}}\right) = 2^{b-1}\Gamma(b)\left(4\frac{k_1\cdots k_{p-1}}{s_1\cdots s_{q-1}}z\right)^{-(b-1)/2} \times J_{b-1}\left(2\sqrt{\frac{k_1\cdots k_{p-1}}{s_1\cdots s_{q-1}}z}\right),$$

uniformente em conjuntos compactos no plano complexo. Aqui J_ν é a função de Bessel de primeira espécie de ordem ν e Γ é a função gama,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \quad \text{e} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $Re(x) > 0$.

Fórmulas tipo Mehler–Heine descrevem o comportamento assimptótico dos polinômios convenientemente escalonados. Como conseqüência, obtemos o comportamento assimptótico das raízes desses polinômios. Além de mostrar esse resultado, ilustraremos com experimentos numéricos e figuras o comportamento das raízes dos polinômios.

Palavras-chave: *Funções hipergeométricas, Comportamento assimptótico de polinômios.*

Referências

[1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, "Special Functions", Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] C.F. Bracciali, J.J. Moreno–Balcázar, Mehler–Heine asymptotics of a class of generalized hypergeometric polynomials, *Oberwolfach Preprints (OWP)*, 23 (2013) 1-15.

[3] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

