

Uma proposta alternativa para a classificação de cônicas por meio de números complexos

Tacildo de Souza Araújo¹
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
Cristiano Torezzan²
FCA/UNICAMP, Limeira, SP

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma conexão entre números complexos e cônicas. De forma didática e sem abandonar completamente o formalismo matemático, utilizaremos a estrutura geométrica dos números complexos para construir uma sequência de resultados que fornecem uma alternativa elegante e acessível para caracterizar e classificar as cônicas. Nosso método permite a compreensão e realização de movimentos de rotação e translação das cônicas por meio de operações elementares com números complexos, ressaltando assim, o poder de tais números na resolução de problemas envolvendo movimentos no plano. Espera-se que este trabalho sirva como ferramenta alternativa para o ensino-aprendizado de cônicas e números complexos, contribuindo para a valorização da criatividade de estudantes e professores na elaboração de ferramentas alternativas que enriqueçam o ensino da matemática.

Palavras-chave. Ensino de matemática, Números Complexos, Cônicas.

1 Introdução

Os primeiros estudos sobre cônicas remontam aos trabalhos de Apolônio de Perga (261 aC), cujo resultado compilado ficou conhecido na forma do *Tratado sobre Cônicas*, [3]. Séculos mais tarde, o estudo analítico das cônicas foi apresentado por Fermat (1601-1665), que determinou expressões gerais para a hipérbole, elipse e parábola por meio de equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) do plano [3].

De maneira geral, uma cônica é o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano real, que satisfazem a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos. Geometricamente, as cônicas são obtidas pela interseção de um plano com um cone duplo de revolução, originando três diferentes curvas: elipses, parábolas e hipérbolas.

Para além de sua intrínseca beleza geométrica e ampla aplicabilidade, do ponto de vista analítico, um dos problemas fundamentais no estudo de cônicas refere-se à caracterização e classificação dessas figuras com base em sua representação algébrica. De maneira geral, dada uma equação completa de segundo grau em duas variáveis, deseja-se determinar qual a cônica associada e caracterizar as propriedades da curva subjacente.

O problema de classificação de cônicas aparece pela primeira no Ensino Médio, de forma quase concomitante com a introdução dos números complexos. Nesse contexto, uma conexão entre esses dois temas pode ser muito oportuna para explorar os aspectos geométricos dos números complexos e apresentar uma forma alternativa para a caracterização de cônicas e determinação dos seus pontos

¹tacildo.araujo@ifam.edu.br

²torezzan@unicamp.br

notáveis sem utilizar a abordagem clássica através autovalores. É esse o propósito do presente trabalho.

Na seção 2 estabelecemos as notações e apresentamos alguns resultados preliminares que formam a base para o desenvolvimento do nosso método. A seção 3 traz as principais contribuições do trabalho. Nessa seção discutimos de forma breve a caracterização, a classificação e as condições de existência das cônicas e exploramos os casos degenerados mais importantes. Nas seções 4 e 5 apresentamos um roteiro, seguido de um exemplo, para ilustração do método e as conclusões do trabalho.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos os fundamentos matemáticos que formam a base para o método que será desenvolvido ao longo do trabalho. Para um estudo mais detalhado e aprofundado recomendamos [1, 2, 4].

Denotaremos por \mathbb{R} e \mathbb{C} o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos, respectivamente. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, i é chamado de unidade imaginária, o conjugado de z será denotado por $\bar{z} = a - bi$, $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de z .

É possível verificar, por substituição direta, que $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Estas fórmulas serão especialmente úteis ao longo deste trabalho.

Como primeira contribuição deste trabalho apresentamos uma fórmula para o cálculo da raiz de um número complexo que será muito utilizada na seção 4.

Proposição 2.1. *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ não nulo. Uma das raízes de z é dada por*

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + sig(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} i, \quad (1)$$

onde $sig(b)$ é o sinal da parte imaginária b do complexo z .

As próximas duas proposições constituem os principais pilares do trabalho. Por um lado, a Proposição 2.2 fornece um fórmula para a distância de uma reta a um ponto arbitrário fora dela por meio de números complexos. Por outro lado, a Proposição 2.3 oferece uma definição menos conhecida, porém, mais geral para o conceito de cônica. De fato, a proposição mostra que elipse, hipérbole e parábola fazem parte da mesma família, como mostra a figura 1.

Proposição 2.2. *Seja r uma reta em \mathbb{C} definida por $z(t) = z_0 + tv$ com $|v| = 1$ e $t \in \mathbb{R}$. A distância mínima λ de um ponto arbitrário f à reta r é dada pela equação*

$$\lambda = |Im((f - z_0) \bar{v})|.$$

Proposição 2.3. *Sejam r uma reta do plano complexo, f um ponto fora dela e $\varepsilon > 0$ um número real. Se $z \neq f$ é um ponto arbitrário fora de r , então a equação $\frac{d(z, f)}{d(z, r)} = \varepsilon$, possui solução. Além disso, a solução é uma elipse para $0 < \varepsilon < 1$, uma parábola para $\varepsilon = 1$ e uma hipérbole para $\varepsilon > 1$.*

Em função da limitação de páginas deste trabalho, omitiremos a demonstração das proposições acima, que podem ser encontradas em [1].

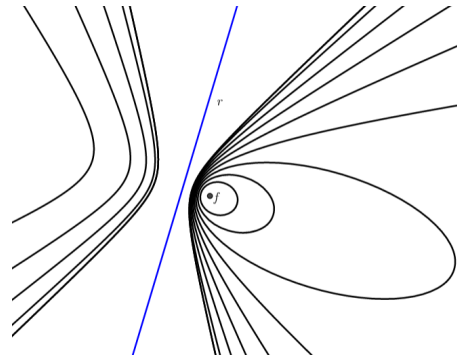


Figura 1: Família de cônicas

3 Números complexos e cônicas

Nesta seção desenvolveremos os conceitos e resultados que permitem analisar a existência, caracterizar e classificar as cônicas através de uma equação envolvendo termos quadráticos e lineares da variável $z \in \mathbb{C}$.

3.1 A forma padrão de uma cônica

Considere a equação dada por

$$\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0, \tag{2}$$

com $A, C \in \mathbb{C}$ e $B, D \in \mathbb{R}$. Mostraremos que, se C é uma cônica, então sua equação satisfaz a equação (2). Com efeito, sejam r a reta diretriz da cônica, definida por $r(t) = z_0 + tv$, com $z_0, v \in \mathbb{C}$, $|v| = 1$ e f um ponto (foco) fora dela. Usando a Proposição 2.3 e em seguida a Proposição 2.2, obtemos a equação

$$|z - f| = \varepsilon |Im((z - z_0)\bar{v})|. \tag{3}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação (3), usando $|z|^2 = z\bar{z}$ e $Im((z - z_0)\bar{v}) = \frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i}$, após algumas simplificações obtemos

$$\bar{v}^2 z^2 + v^2 \bar{z}^2 + \left(\frac{4}{\varepsilon^2} - 2\right) z\bar{z} + \left(2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}\bar{f}\right) z + \left(2z_0 - 2\bar{z}_0v^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}f\right) \bar{z} + \left(\frac{4}{\varepsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0\right) = 0.$$

Tomando $\tilde{A} = v^2$, $\tilde{B} = \frac{4}{\varepsilon^2} - 2 > 0$, $\tilde{C} = 2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}\bar{f}$ e $\tilde{D} = \frac{4}{\varepsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0$, temos o resultado desejado.

A recíproca do resultado acima não vale, isto é, nem sempre a equação (2) representa uma cônica. Quando for o caso, a classificação da cônica se dá facilmente pela observação do valor de B . Com efeito, pela Proposição 2.3, $\varepsilon = 1$ implica $B = 2$ (parábola), $0 < \varepsilon < 1$ implica $B > 2$ (elipse) e $\varepsilon > 1$ implica $-2 < B < 2$ (hipérbole).

Diremos que a equação (2) está na *forma padrão* quando $|A| = 1$ e $B > -2$. Note que se $A \neq 0$ e $B \leq -2$, então a equação $-|A|^{-1}(\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D) = 0$, está na forma padrão. Portanto, toda equação da forma (2) pode ser escrita na forma padrão. Mais ainda, se $A \neq 0$ a equação (2) não representa uma cônica. Um estudo detalhado dos casos degenerados decorrentes desta situação pode ser encontrado em [1].

De posse desses resultados, podemos fazer a conexão com o estudo clássico das cônicas. Considere a equação geral do segundo grau com duas variáveis com coeficientes reais dada por

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (4)$$

Substituindo $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ na equação (4) e reagrupando os termos semelhantes, obtemos

$$\left(\frac{a - c - bi}{4}\right) z^2 + \left(\frac{a - c + bi}{4}\right) \bar{z}^2 + \left(\frac{2a + 2c}{4}\right) z\bar{z} + \left(\frac{d - ei}{2}\right) z + \left(\frac{d + ei}{2}\right) \bar{z} + f = 0. \quad (5)$$

Comparando as equações (5) e (2) obtém-se $A = \frac{a - c + bi}{4}$. Portanto, de acordo com o que vimos acima, uma condição necessária para que a equação (4) represente uma cônica é $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$.

3.2 A forma canônica de uma cônica

Suponha que a equação (2) esteja na forma padrão. Fazendo a mudança de variável $z = \sqrt{A}w \Rightarrow z^2 = Aw^2$ e observando que $\bar{z}^2 = \overline{Aw^2}$ e $\bar{z} = \sqrt{\overline{Aw}} = \sqrt{\overline{A}}\bar{w}$, temos

$$\overline{A}Aw^2 + A\overline{A}\bar{w}^2 + B\sqrt{Aw}\sqrt{\overline{A}\bar{w}} + C\sqrt{Aw} + \overline{C}\sqrt{\overline{A}\bar{w}} + D = 0$$

Note que $\sqrt{A}\sqrt{\overline{A}} = \sqrt{A\overline{A}} = \sqrt{|A|^2} = |A| = 1$. Assim, tomando $C' = C\sqrt{A}$ obtém-se a equação

$$w^2 + \bar{w}^2 + Bw\bar{w} + C'w + \overline{C'}\bar{w} + D = 0 \quad (6)$$

, que chamaremos de *forma canônica*.

Substituindo $w = x_1 + y_1i$ e $C' = c'_1 + c'_2i$ na equação acima obtemos

$$(B + 2)x_1^2 + (B - 2)y_1^2 + 2c'_1x_1 - 2c'_2y_1 + D = 0.$$

Fazendo $\lambda_1 = B + 2 > 0$ e $\lambda_2 = B - 2 > -4$ a equação resulta em

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c'_1x_1 - 2c'_2y_1 + D = 0. \quad (7)$$

Resta analisar a equação (7) para os diferentes valores de B . Se $B > 2$ ($\lambda_2 > 0$) a equação se reduz a

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 = D', \quad (8)$$

com $D' = \frac{c'_1{}^2}{\lambda_1} + \frac{c'_2{}^2}{\lambda_2} - D$ e $u = x_2 + y_2i$ é dado pela translação $u = w + \left(\frac{c'_1}{\lambda_1} - \frac{c'_2}{\lambda_2}i\right)$. Portanto, se $D' < 0$ a equação não tem solução, se $D' = 0$ a equação possui solução única $x_2 = y_2 = 0$ e se $D' > 0$ obtemos a elipse de equação

$$\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

Por outro lado, se $-2 < B < 2$ ($\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$), então a equação (7) se reduz a

$$\lambda_1x_2^2 - |\lambda_2|y_2^2 = D'. \quad (9)$$

Logo, $D' = 0$, implica $y_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}}x$, ou seja, a equação representa um par de retas. Por outro lado, se $D' \neq 0$, então dividimos a equação (9) por D' e obtemos a hipérbole de equação

$$\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{|\lambda_2|}}\right)^2} = 1.$$

Finalmente, se $B = 2$ ($\lambda_2 = 0$) após o completamento de quadrados, a equação (7) tem forma

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1}\right)^2 - 2c'_2 y_1 + D - \frac{c'_2{}^2}{\lambda_1} = 0 \tag{10}$$

daí, se $c'_2 = 0$ a equação não representa uma cônica e se $c'_2 \neq 0$, dividimos a equação por $2c'_2$ e obtemos a parábola de equação

$$x_2^2 = 2py_2,$$

com $2p = \frac{2c'_2}{\lambda_1}$ e $u = w + \left(\frac{c'_1}{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_1 D - c'_2{}^2}{2\lambda_1 c'_2}\right)i\right) = x_2 + y_2 i$.

Para facilitar as aplicações, resumimos os resultados desta seção na tabela abaixo. Para isso, considere $B > -2$ e $C' = c'_1 + c'_2 i$ na equação (6).

Tabela 1: Classificação das cônicas

B	Cônica	Se e somente se
$-2 < B < 2$	Elipse	$\frac{c'_1{}^2}{B+2} + \frac{c'_2{}^2}{B-2} - D \neq 0$
$B = 2$	Parábola	$c'_2 = \text{Im}(C') \neq 0$
$B > 2$	Hipérbole	$\frac{c'_1{}^2}{B+2} + \frac{c'_2{}^2}{B-2} - D > 0$

4 Roteiro para classificação de cônicas por meio de números complexos

Nesta seção apresentamos um processo de caracterização, classificação e determinação dos pontos notáveis das cônicas através de números complexos. Além disso, apresentamos um exemplo para ilustrar o método proposto.

4.1 Roteiro

- Passo 1: verificar se $(a - c)^2 + b^2$ é diferente de zero.
- Passo 2: Complexificar a equação tomando $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- Passo 3: Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação pelo módulo de A e multiplicando por -1 se $B \leq -2$).

- Passo 4: Aplicar a rotação $z = \sqrt{A}w$ para obter a forma canônica.
- Passo 5: Verificar na tabela 1 se a equação na forma canônica representa uma cônica.
- Passo 6: Transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas e completar os quadrados.
- Passo 7: Aplicar a translação $u = w + \gamma$ para obter a equação da cônica no plano U .
- Passo 8: Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas.
- Passo 9: Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

4.2 Exemplo

Dada a equação $2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8y = 0$, vamos investigar se há uma cônica associada. Em caso afirmativo, quais são as suas características. Seguiremos o roteiro apresentado previamente.

Passo 1: Como $(a - c)^2 + b^2 = (2 - 2)^2 + 4^2 = 16$, a equação pode representar uma cônica.

Passo 2: Complexificando a equação obtemos,

$$4iz^2 + (-4i)\bar{z}^2 + 8z\bar{z} + (-16i)z + (16i)\bar{z} = 0$$

Passo 3: Dividindo-se a equação acima por $|A| = |-4i| = 4$, obtém-se a forma padrão,

$$iz^2 + (-i)\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + (-4i)z + (4i)\bar{z} = 0.$$

Pela equação (1), a direção da diretriz é dada por $v = \sqrt{A} = \sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Passo 4: Fazendo $z = \sqrt{A}w$, obtemos a forma canônica da cônica

$$w^2 + \bar{w}^2 + 2w\bar{w} + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)w + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)\bar{w} = 0$$

Passo 5: Note que $B = 2$ e $c'_2 = -4/\sqrt{2}$ implicam que a cônica é uma parábola, conforme Tabela 1).

Passo 6: Fazendo $w = x_1 + y_1i$ e completando o quadrado obtém-se a equação da parábola, no plano W , dada por $\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Passo 7: Aplicando a translação

$$u = w + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i = x_2 + y_2i, \quad (11)$$

obtemos a equação da parábola no plano U ,

$$x_2^2 = -\sqrt{2}y_2. \quad (12)$$

Passo 8: A equação (12) permite a determinação de todos os pontos notáveis da parábola no plano U .

Passo 9: Em seguida, usa-se a equação (11) para determinar tais pontos no plano W e, finalmente, usa-se $z = \sqrt{A}w$ para obter os pontos no plano original (Plano complexo)

Evidentemente, os pontos no plano original podem ser determinados por meio da composição de movimentos dada por $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \left[u + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) \right]$. Entretanto, a sequência de passos

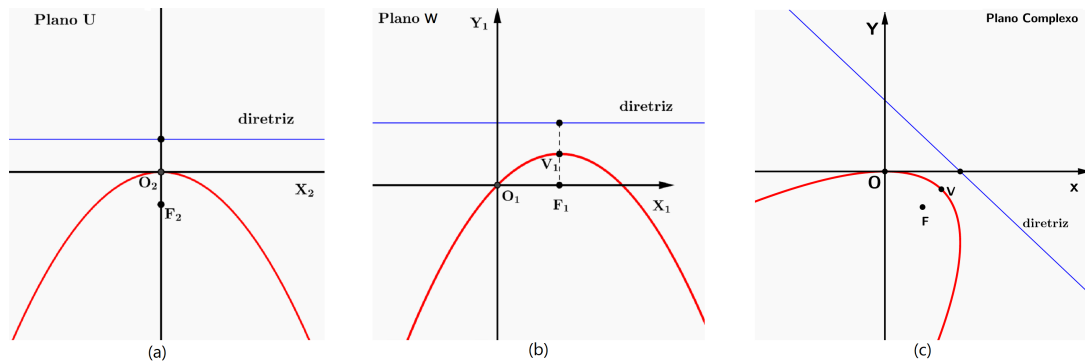


Figura 2: Parábola nos planos U, W e complexo, respectivamente.

recomendada permite que o aluno perceba os movimentos (rotação e translação) que estão sendo realizados ao longo do processo de obtenção dos pontos. A figura abaixo ilustra esses movimentos.

A figura (b) representa a translação do plano U (figura (a)) da direção do complexo $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ e a figura (c) representa a rotação do plano W (figura (b)) de um ângulo de 45 graus, no sentido horário.

5 Conclusões

Propomos um método alternativo, acessível e eficiente para caracterizar e classificar as cônicas por meio de operações elementares com números complexos. Elaboramos um passo a passo que permite que o aluno construa o conhecimento sem a necessidade de decorar fórmulas, além de valorizar o aspecto geométrico dos números complexos, tão pouco explorado no ensino.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Alfredo Wagner Martins Pinto (*in memoriam*) pelas contribuições em parte deste trabalho.

Referências

- [1] Araújo, Tacildo de Souza. *Números complexos e cônicas*. Dissertação de Mestrado. UFAM, 2014.
- [2] Andreescu, Titu, Andrica, Dorin. *Complex Number from A to... Z*, volume 165. Boston, Birkhäuser, 2006.
- [3] Boyer, Carl B. *História da Matemática*, Edgar Bluncher Ltda, São Paulo, 1996.
- [4] Yaglom, Isaak Moiseevitch. *Complex numbers in geometry*. Academic Press, 2014.