Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Formulação variacional e estimativas *a priori* para o método de Galerkin para uma equação de difusão fracionária

Maria E. S. Lima[1]
Imecc/Unicamp, Campinas, SP
Edmundo C. Oliveira[2]
Imecc/Unicamp, Campinas, SP
Arlúcio C. Viana[3]
Dma/Ufs, São Cristóvão, SE

Resumo. Neste trabalho abordamos algumas ferramentas que possibilitam aplicar o metódo de Galerkin para uma equação de difusão fracionária, determinando estimativas *a priori* e formulação variacional que nos permitem garantir existência e unicidade de uma solução.

Palavras-chave. Método de Galerkin, equação de difusão fracionária, estimativas *a priori*, existência e unicidade de soluções.

1 Introdução

O cálculo fracionário tem ganhado muito destaque nas últimas décadas, devido as suas aplicações em diferentes campos da ciência, em particular, na engenharia, fornecendo várias ferramentas úteis para resolver equações diferenciais e integrais e outros problemas envolvendo funções especiais da física matemática, além de suas extensões e generalizações em uma e mais variáveis. Dentre as várias aplicações do cálculo fracionário podemos citar o fluxo de um fluido, reologia, processos dinâmicos em estruturas auto-semelhantes e porosas, transporte difusivo semelhante à difusão, redes elétricas, probabilidade e estatística, teoria de controle de sistemas dinâmicos e viscoelasticidade (ver [6]).

Vamos discutir o seguinte problema, equação de difusão e condição inicial

$$\begin{cases} u_t + \partial_t(g_\alpha * (-\Delta)^\gamma u) = f, & \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $T > 0$, $0 < \gamma < 1$, Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^n$, $u = 0$ na fronteira de Ω, $*$ denota o produto de convolução e g_α é a função de Gel'fand Shilov definida por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

[1]elismara_sousa@hotmail.com
[2]capelas@unicamp.br
[3]arlucioviana@gmail.com

onde Γ é a função gama de Euler. Além disso, o operador Laplaciano fracionário pode ser definido na sua forma espectral por (ver seção 2.5.1 de [7]):

$$(-\Delta)^{\gamma} u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma} \, (u, e_k)_{L^2(\Omega)} \, e_k(x), \tag{3}$$

onde $\gamma \in (0,1)$, λ_k são autovalores, e e_k são autofunções de $(-\Delta)$ com condições de contorno de Dirichlet, ou seja,

$$\begin{aligned} -\Delta e_k &= \lambda_k e_k, \text{ em } \Omega, \\ e_k &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

As equações de difusão de ordem fracionária descrevem fenômenos de difusão anômala, que auxiliam na análise de sistemas como: difusão em plasmas, difusão em fractais, difusão anômala em superfícies líquidas, análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis, entre outros sistemas físicos (ver [1] e [2]).

A difusão anômala pode ser caracterizada tanto por admitir saltos do tipo *Levy flights*, representados matematicamente pelo Laplaciano fracionário, como também *long rests* descritos pela derivada fracionária. Neste caso, a equação apropriada, segundo Schneider e Wyss [9] e Metzler e Klafter [8], é dada por

$$u_t + D_t^{1-\alpha}(-\Delta)^{\gamma} u = 0, \tag{5}$$

onde $\gamma \in (0,1)$ e $D_t^{\beta}\varphi$ denota a derivada fracionária de φ de ordem $\beta > 0$ no sentido de Riemann-Liouville, ou seja, $\alpha \in (0,1)$ (ver definição abaixo). Dessa maneira, (5) pode ser reescrita como a equação

$$u_t + \partial_t \int_0^t g_\alpha(t-s)(-\Delta)^{\gamma} u(s) ds = 0, \tag{6}$$

onde g_α é a função definida em (2).

Para a formulação variacional do problema vamos usar a forma integral de (1), dada por

$$u = u_0 - g_\alpha * (-\Delta)^{\gamma} u + 1 * f. \tag{7}$$

Vamos abordar a formulação variacional e demonstrar uma estimativa *a priori* das soluções aproximadas da forma integral de (1), dada por (7), resultados que servirão para aplicar o método de Galerkin (ver [4]), que consiste em encontrar soluções aproximadas para o problema, projetando-o em subespaços de dimensão finita, lidando com equações diferenciais lineares de ordem fracionária com valores iniciais.

2 Preliminares

Nessa seção apresentamos algumas definições e notações para o presente trabalho.

Definição 1. *Seja* $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *um intervalo finito sobre os reais* $\mathbb{R}$. *As integrais fracionárias de Riemann-Liouville,* $I_{a^+}^{\alpha}$ *e* $I_{b^-}^{\alpha}$ *de ordem* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ *são dadas por:*

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \; t > a, \\ (I_{b^-}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \; t < b, \end{aligned} \tag{8}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ *é a função gama e* $f \in L^1[a,b]$.

Definição 2. *As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, $D^\alpha_{a^+}$ e $D^\alpha_{b^-}$ de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ são dadas por:*

$$(D^\alpha_{a^+} f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a^+} f)(t), \ (n = [\alpha] + 1, t > a),$$
$$(D^\alpha_{b^-} f)(t) = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b^-} f)(t), \ (n = [\alpha] + 1, t < b),$$

onde $[\alpha]$ significa a parte inteira de α e $f : I \to \mathbb{R}$. Tomamos $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Definição 3. *A derivada fracionária de Caputo de ordem α, em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, é dada por*

$$({}^c D^\alpha_{a^+} \varphi)(t) := \left[D^\alpha_{a^+} \left(\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) \right] (t),$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}_0$

Note que o problema (1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} u_t + D^{1-\alpha}_t (-\Delta_x)^\gamma u = f, & \Omega \times [0, T], \\ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Onde $0 < \gamma < 1$ e $0 < \alpha < 1$. De fato, uma vez que $0 < \alpha < 1$ e $1 - \alpha < 1$, temos que

$$D^{1-\alpha}_t [(-\Delta)^\gamma u] = \frac{d}{dt} \left(I^{1-(1-\alpha)} (-\Delta)^\gamma u \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (-\Delta)^\gamma u(s) \, ds \right)$$
$$= \partial_t \left(\int_0^t g_\alpha(t-s)(-\Delta)^\gamma u(s) \, ds \right) = \partial_t \left(g_\alpha * (-\Delta)^\gamma u \right).$$

Vamos utilizar os seguintes espaços $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $L^2(0, T; H^\gamma(\Omega))$ e $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, onde Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, que pode ser representado de modo geral por $L^p(0, T; X)$ em que X é um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_X$. Lembrando que $L^p(\Omega)$ é o espaço de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|, & \text{se } p = \infty. \end{cases} \tag{10}$$

O espaço de Sobolev fracionário H^γ é um espaço de Hilbert e, é definido a seguir (ver definição A.5 de [7]).

Definição 4. *Para qualquer $\gamma \geq 0$*

$$H^\gamma(\Omega) := \left\{ u = \sum_{k=1}^\infty u_k \phi_k \in L^2(\Omega) : \|u\|^2_{H^\gamma(\Omega)} := \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\gamma u_k^2 < \infty \right\}, \tag{11}$$

onde (λ_k, ϕ_k) são os autovalores e seus respectivos autovetores de $(-\Delta)$ com condições de contorno de Dirichlet, cuja a norma coincide com $\|(-\Delta)^\gamma u\|_{L^2}$, de acordo com (3).

Definição 5. *O espaço $L^p(0, T; X)$ consiste de todas as funções mensuráveis*

$$u : (0, T) \to X$$

com

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_X dt \right)^{1/p} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, *e*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Por simplicidade, em alguns momentos, denotamos $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ por $L^p(0,T;L^p)$. Além disso, denotamos o produto interno em L^2 por $(\cdot,\cdot)$ e em H^γ por $(\cdot,\cdot)_{H^\gamma}$.

Utilizamos o seguinte teorema de existência e unicidade para um problema de Cauchy de uma equação matricial fracionária com derivada de Caputo. (ver Teorema 7.14, [6])

Antes, apresentamos algumas definições necessárias.

Definição 6. *Sejam* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ *e* $\alpha > 0$. *Definimos a matriz* α*-função exponencial por*

$$e_\alpha^{Az} := z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}.$$

Definição 7. *Um espaço ponderado de funções contínuas é da forma*

$$C_{n-\alpha}[a,b] = \left\{ g(x) : (x-a)^{n-\alpha} g(x) \in C[a,b], \|g\|_{Cn-\alpha} = \left\| (x-a)^{n-\alpha} g(x) \right\|_C \right\}.$$

Teorema 1. *O seguinte problema de valor inicial*

$$({}^cD_{a^+}^{\alpha}\overline{Y})(x) = A\overline{Y}(x) + \overline{B}(x), \tag{12}$$

$$\overline{Y}(a) = \bar{b},\ (\bar{b} \in \mathbb{R}^n), \tag{13}$$

onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $\overline{B} \in \overline{C}_{1-\alpha}([a,b])$, *tem uma única solução contínua dada por*

$$\overline{Y} = \int_a^x e_\alpha^A(x-\xi)[\overline{B}(\xi) + A\bar{b}]\, d\xi + \bar{b}. \tag{14}$$

Precisamos do seguinte resultado que pode ser encontrado em [3].

Teorema 2. *Seja* $(H,(\cdot,\cdot))$ *um espaço de Hilbert real,* $f \in L^2(0,T;H)$ *e* $\alpha \in (0,1)$. *Então*

$$\int_0^T (f(t), g_\alpha * f(t))\, dt \geq 0. \tag{15}$$

3 Resultados principais

Nesta seção abordamos a formulação variacional e obtemos uma estimativa *a priori* necessária para aplicar o método de Galerkin de (1).

3.1 Formulação variacional

Para a formulação variacional do problema vamos usar a forma integral de (1), dada por

$$u = u_0 - g_\alpha * (-\Delta)^\gamma u + 1 * f\,, \tag{16}$$

onde $u = 0$ na fronteira de Ω e $\gamma \in (0,1)$. Multiplicando (7) por $v \in H^\gamma$ tal que $v = v(x)$ e, integrando sobre Ω, temos que

$$\int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega u_0 v\, dx - \int_\Omega (g_\alpha * (-\Delta)^\gamma u) v\, dx + \int_\Omega (1 * f) v\, dx\,. \tag{17}$$

Assim, utilizando o teorema de Fubini e sabendo que o Laplaciano fracionário é auto-adjunto em L^2, além de possuir a propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (g_\alpha * (-\Delta)^\gamma u)v\,dx &= \int_\Omega \int_0^t g_\alpha(t-s)(-\Delta)^\gamma u(s,x)v(x)\,ds\,dx\\ &= \int_0^t g_\alpha(t-s)\int_\Omega (-\Delta)^\gamma u(s,x)v(x)\,dx\,ds\\ &= \int_0^t g_\alpha(t-s)\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u(s,x)(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v(x)\,dx\,ds\\ &= \int_\Omega \left(\int_0^t g_\alpha(t-s)(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u(s,x)\,ds\right)(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v(x)\,dx\\ &= \int_\Omega (g_\alpha * (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u)(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v\,dx\\ &= (g_\alpha * (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v).\end{aligned}$$

Desse modo, segue de (17) que

$$(u,v) = (u_0,v) - (g_\alpha * (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v) + (1 * f, v) \tag{18}$$

ou

$$(u,v) = (u_0,v) - (g_\alpha * u, v)_{H^\gamma} + (1 * f, v), \tag{19}$$

onde (19) nos dá a forma variacional do problema. Denotamos $(g_\alpha * u, v)_{H^\gamma}$ por $B[u,v;t]$. Agora vamos construir soluções aproximadas. Para isto, considere uma base $\{v_k\}_k$ ortogonal de H^γ e ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Para cada m inteiro, considere o subespaço vetorial

$$V^m = [v_1, \cdots, v_m]$$

e,

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m \beta_m^j(t) v_j, \tag{20}$$

onde devemos determinar os coeficientes $\beta_m^j(t)\,(0 \le t \le T$ e $j = 1, \cdots, m)$ tais que

$$\beta_m^j(0) = (u_0, v_j) \qquad j = 1, \cdots, m \tag{21}$$

e

$$(u_m, v_j) = \beta_m^j(0) - B[u_m, v_j; t] + (1 * f, v_j)\,. \tag{22}$$

Teorema 3. *Se $f \in L^\infty(0,T;L^2)$, então para cada inteiro $m = 1, 2, \cdots$, existe uma única função u_m da forma* (20) *satisfazendo* (21) *e* (22).

Demonstração. Suponha que u_m tenha a forma (20). A demonstração se reduz a mostrar a existência e unicidade dos $\beta_m^j(t)$. Daí,

$$(u_m, v_k) = \left(\sum_{j=1}^m \beta_m^j(t) v_j, v_k\right) = \beta_m^k(t),$$

pois $\{v_j\}_j$ é ortonomal. Além disso,

$$
\begin{aligned}
B[u_m, v_k; t] &= (g_\alpha * (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u_m, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v_k) = g_\alpha * ((-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \sum_{j=1}^{m} \beta_m^j(t) v_j, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v_k) \\
&= g_\alpha * (\sum_{j=1}^{m} \beta_m^j(t)(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v_j, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v_k) = \sum_{j=1}^{m} (g_\alpha * \beta_m^j)(t)(v_j, v_k)_{H^\gamma} \\
&= \sum_{j=1}^{m} (g_\alpha * \beta_m^j)(t) e^{jk}.
\end{aligned}
$$

Defina $f^k(t) = (1 * f(t), v_k)$. Logo, de (22), temos

$$
\beta_m^k(t) - \beta_m^j(0) + \sum_{j=1}^{m} e^{jk}(g_\alpha * \beta_m^j)(t) = f^k(t), \tag{23}
$$

onde $e^{jk} = (v_j, v_k)$.

Sejam $X = \begin{bmatrix} \beta_m^1(t) \\ \vdots \\ \beta_m^n(t) \end{bmatrix}$, $X^0 = \begin{bmatrix} \beta_m^1(0) \\ \vdots \\ \beta_m^n(0) \end{bmatrix}$, $A = [e^{ij}]$ e $F = \begin{bmatrix} (f, v_1) \\ \vdots \\ (f, v_m) \end{bmatrix}$ podemos reescrever (23) na seguinte forma matricial

$$
X - X^0 + g_\alpha * (AX) = 1 * F,
$$

convoluindo com $g_{1-\alpha}$, segue que

$$
g_{1-\alpha} * (X - X^0) + 1 * (AX) = 1 * g_{1-\alpha} * F \Rightarrow^c D^\alpha X + AX = g_{1-\alpha} * F\,.
$$

Assim, por hipótese, como $f \in L^\infty(0, T; L^2)$, segue que $g_{1-\alpha} * F \in C_{1-\alpha}([0, T])$. Logo, pelo teorema 1 segue a existência e unicidade dos β_m^j. ☐

3.2 Estimativas *a priori*

Nesta seção demonstramos uma estimativa *a priori* dada pelo teorema a seguir.

Teorema 4. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. Se $f \in L^1(0, T; L^2)$, então*

$$
\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \|u_{0m}\|_{L^2} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}. \tag{24}
$$

Se, adicionalmente, $f \in L^\infty(0, T; L^2)$, então

$$
\|u_m\|_{L^1(0,T;H^\gamma)} \leqslant \frac{T^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u_{0m}\|_{L^2} + \frac{T^{3-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(2-\alpha)^{\frac{3}{2}} \Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)}. \tag{25}
$$

Demonstração. Sendo u_m a função definida em (20) e garantida pelo teorema 3, multiplicamos (18) por β_m^j e somamos com j variando de 1 a m, para obter

$$
\|u_m\|_{L^2}^2 = (u_{0m}, u_m) - (g_\alpha * u_m, u_m)_{H^\gamma} + (1 * f, u_m)_{L^2}. \tag{26}
$$

Notamos que $u_m \in L^2(0, T; H^\gamma)$. De fato, olhando para a expressão (20) podemos inferir que

$$
\|u_m(t)\|_{L^2(0,T;H^\gamma)}^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \|\beta_m^j(t) v_j(\cdot)\|_{H^\gamma}^2 dt \leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^T |\beta_m^j(t)|^2 \, dt \|v_j\|_{H^\gamma}
$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \|\beta_m^j(t)\|_{L^2(0,T)}^2 \|v_j\|_{H^\gamma} < \infty\,,$$

uma vez que $\beta_m^j \in L^2(0,T)$, $v_j \in H^\gamma$ e a soma é finita.

Assim, pelo teorema 2, temos

$$(g_\alpha * u, u)_{H^\gamma} \geq 0.$$

Segue-se disso e de (26) que

$$\|u_m\|_{L^2}^2 \leq (u_{0m}, u_m)_{L^2} + (1 * f, u_m)_{L^2} \leq \|u_{0m}\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}\|u_m\|_{L^2},$$

pela desigualdade de Hölder. Daí,

$$\|u_m(t)\|_{L^2} \leq \|u_{0m}\|_{L^2} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}. \tag{27}$$

Isto prova (24). Para a demonstração de (25) é utilizado o lema 6.2 (ver [5]) e a desigualdade integral de Minkowski.

□

4 Conclusões

Neste trabalho obtivemos a formulação variacional e uma estimativa *a priori* de (9), resultados que vão nos auxiliar para aplicar o método de Galerkin e nos possibilitar a existência e unicidade da solução do problema (9). Estudos nesse sentido encontram-se em andamento.

Referências

[1] Biler,P., Funaki T. and Woyezynski, W. A. *Fractal Burgers equations*, 1: 9-46, 1998. MR1637513

[2] Bonkile, M., Awasthi,A., Lashmi, C., Mukundai,V. and Aswin,V. S. *A systematic literature review of Burgers' equation with recent advances*, Pranama J. Phys. 90:60, 2018.

[3] Djilali, L.,Rougirel, A.*Galerkin method for time fractional difusion equations* Journal of Elliptic and Parabolic Equations 4:349-368, 2018.

[4] Evans, L. C. *Partial differential equations.* Providence, RI, 1998

[5] Kemppainen, J., et al. *Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in* $\mathbb{R}^d$. Mathematische Annalen 366: 941-979, 2016.

[6] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[7] Lischke, A. et al. *What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results.* Journal of Computational Physics, 404:1-62, 2020.

[8] Metzler R. and Klafter, J. *The random walks guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Phys. Rep., 339:1-77, 2000.

[9] Schneider, W. R. and Wyss, W. *Fractional diffusion and wave equations*, J. Math. Phys. 30:134-144, 1989.

