Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Existência e concentração de soluções para uma equação de Schrödinger singularmente perturbada

Jonas A. P. Ederli* **Marcos T.O. Pimenta**
Depto de Matemáfica e Computação, FCT, Unesp
19060-900, Pres. Prudente, SP
E-mail: ..@...br, pimenta@fct.unesp.br

RESUMO

De grande interesse na física-matemática é a versão estacionárica da equação de Schrödinger não-linear, ou mais especificamente,

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u &= f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

onde f e V satisfazem o seguinte conjunto de hipóteses:

(V_1) $V \in C^0(\mathbb{R}^N)$,

(V_2) $0 < V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V < \liminf_{|x| \to +\infty} V$.

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R})$,

(f_2) $f(0) = f'(0) = 0$,

(f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 2^* - 1)$, tais que $|f(s)| \leq c_1|s| + c_2|s|^p$, para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$,

(f_4) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

(f_5) $\dfrac{f(s)}{s}$ é crescente para $s > 0$.

A equação (1) foi estudada por Rabinowitz em [2], onde foi provado um resultado de existência de solução usando pioneiramente métodos puramente variacionais, onde a não-linearidade f satisfaz condições tais como $(f_1) - (f_5)$. Após isso, Wang em [3] provou que o problema (1) com a não-linearidade $f(u) = |u|^{p-1}u$, admite uma sequência de soluções que se concentra em torno do mínimo global do potencial V. Em [1], Figueiredo e Alves provam resultados semelhantes, ou seja, de existência e concentração de soluções para o problema (1), porém substituindo-se o operador $-\Delta$ pelo $-\Delta_p$.

Neste trabalho, estudamos o problema (1) com uma não-linearidade f satisfazendo hipóteses menos restritivas que as apresentadas por Wang em seu trabalho. Por uma solução do problema (1) entendemos uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaça a equação (1) no sentido fraco, ou seja, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

O principal resultado provado é o seguinte teorema.

*Bolsista CAPES

Teorema 1. *Sejam V e f satisfazendo (V_1) e (V_2) e (f_1) - (f_5), respectivamente. Então para toda sequência $\epsilon_n \to 0$, existe uma subsequência que continuaremos a denotar por (ϵ_n) tal que (1) (com ϵ_n no lugar de ϵ) possui uma solução positiva $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ainda mais, sendo x_n ponto de máximo de u_n, então*

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \inf_{\mathbb{R}^N} V.$$

Para a prova deste, empregaremos métodos variacionais onde será necessário uma análise cuidadosa dos níveis de energia mínima do funcional energia associado. Mais especificamente, tiramos proveito do fato de V ser limitado inferiormente por 0 para definirmos uma norma adequada que é equivalente àquela de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Após isso, utiliza-se os argumentos de Rabinowitz para a prova da existência de solução para o problema (1), para valores de ϵ suficientemente pequenos.

Uma vez obtidas as soluções, mostramos que os níveis minimax associados ao problema (1) convergem para o nível minimax do seguinte problema limite

$$\begin{cases} -\Delta u + V_0 u & = \quad f(u) \ \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Isto, por sua vez, nos permite mostrar a concentração das soluções em torno de um ponto de mínimo de V utilizando-se dos argumentos de Wang.

Nossa principal contribuição é o de generalizar o resultado de Wang para não-linearidades do tipo potência, mas que não sejam necessariamente homogênea. Isto é de fato conhecido para casos ainda mais gerais (operador p-Laplaceano por exemplo) (ver [1]), mas não encontra-se escrito para este caso particular, até o nosso conhecimento. Dessa forma, este trabalho mantém também um caráter pedagógico para estudantes iniciantes nessa área.

Palavras-chave: *Equação de Schrödinger não-linear, Métodos Variacionais*

Referências

[1] C. Alves, G. Figueiredo - Existence and multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$, *Differential Integral Equations* , 19 (2006) 143-162.

[2] P. Rabinowitz - On a class of nonlinear Schrödinger equations , *Z angel Math Phys (ZAMP)*, 43 (1992) 270-291.

[3] X. Wang - On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations , *Commun. Math. Phys.*, 153 (1993) 229-244.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0009