Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Notas sobre um novo método de resolução de equações de Riccati

Alisson da Silva Pinto[1]
Patrícia Nunes da Silva[2]
PPG-CCOMP/IME-UERJ, Rio de Janeiro, RJ
André Luiz Cordeiro dos Santos[3]
DEMAT/CEFET-RJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Em [1], Al Bastami, Belić e Petrović propuseram um novo método para encontrar soluções da equação diferencial de Riccati. Inicialmente, eles obtêm uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem através de uma mudança de variável usual na equação de Riccati. Em seguida, ele apresentam uma nova mudança de variável e discutem a resolução da EDO resultante em dois casos. No primeiro deles, a EDO resultante tem coeficientes constantes. No segundo caso, afirmam que é possível escolher arbitrariamente um dos coeficientes da EDO resultante e tratar casos particulares de EDOs de Riccati. Mostramos neste trabalho que todas as equações de Riccati que pertencem ao primeiro caso podem também ser resolvidas através do método de Chini [3–5]. Ademais, mostramos que qualquer equação de Riccati se enquadra no segundo caso e que não há liberdade na escolha dos coeficientes da EDO resultante.

Palavras-chave. Equação de Riccati, Método de Chini, Equações Separáveis

1 Introdução

Em baixas temperaturas, o condensado Bose-Einstein de gases atômicos confinados é bem descrito pela equação de Gross-Pitaevskii (GPE). Al Bastami, Belić e Petrović [1] consideraram uma equação GPE generalizada para a função de onda do condensado, $\psi(x, y, z, t)$

$$i\partial_t \psi + \frac{\beta(t)}{2}\Delta\psi + \chi(t)|\psi|^2\psi + \alpha(t)r^2\psi = i\gamma(t)\psi, \tag{1}$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Em (1), $\beta(t)$ é o coeficiente de difração, $\chi(t)$ está relacionado ao comprimento de espalhamento de dois corpos o coeficiente $\alpha(t)$ dimensiona a intensidade do potencial quadrático e, $\gamma(t)$ é o coeficiente de ganho/perda.

Utilizando o método proposto por [6] para encontrar uma solução de (1), é necessário resolver vários problemas auxiliares. Um deles consiste em determinar o "chirp" (desvio da frequência instantânea em relação à frequência central) que é caracterizado como solução de uma equação de Riccati cujos coeficientes dependem de $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ presentes na GPE (1).

Motivados por essa necessidade, Al Bastami, Belić e Petrović [1] apresentaram um método de resolução para EDOs de Riccati e o aplicaram para obter solução de algumas GPEs.

[1] alisson.pinto@gmail.com
[2] nunes@ime.uerj.br
[3] andre.santos@cefet-rj.br

2 O método

Al Bastami, Belić e Petrović [1] consideram um método para encontrar soluções da equação diferencial de Riccati

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{2}$$

nos casos em que certas relações entre os coeficientes $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são satisfeitas. Além disso, observaram que há métodos de resolução da equação de Gross-Pitaevskii que são baseados na equação de Riccati.

Por meio de uma substituição usual $y = -u'/(uR)$, eles associam a equação de Riccati (2) a uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \tag{3}$$

onde $a(x) = -(Q + R'/R)$ e $b = PR$.

Os autores consideram $b(x) = P(x)R(x) > 0$ e propõem, então, uma nova mudança de variável:

$$z \equiv z_0 + s\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{b(\varepsilon)}{B(\varepsilon)}}d\varepsilon, \tag{4}$$

onde $s = \pm 1$ e $B(x)$ é arbitrária. Além disso, derivando (4) e elevando ao quadrado, é possivel deduzir a seguinte relação entre a nova variável $z = f(x)$ e $B(x)$:

$$B(x) = \frac{b(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

De (3) e (4), obtemos:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + 2A\frac{du}{dz} + Bu = 0, \tag{5}$$

onde

$$2A = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + a(x)\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Observe que os coeficientes das EDOs (3) e (5) estão relacionados. Para simplificar a notação, denotaremos $c = \frac{b}{B}$. Segue de (4) que

$$\frac{dz}{dx} = sc^{1/2}, \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{b}{B} = c \qquad \text{e} \qquad 2\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} = c'.$$

Portanto

$$\left(\frac{b}{B}\right)' + 2a\left(\frac{b}{B}\right) - 4As\left(\frac{b}{B}\right)^{3/2} = 0. \tag{6}$$

Os autores consideram dois casos especiais: A e $B > 0$ são constantes; e $A = 0$ e $B = B(x)$ é uma função arbitrária.

Na subseção 2.1, mostramos que todas as equações de Riccati que pertencem ao caso em que A e $B > 0$ são constantes também podem ser resolvidas pelo método de Chini [3–5]. Além disso, na subseção 2.2, mostramos que qualquer equação de Riccati pertence ao segundo caso e que a função $B(x)$ não pode ser escolhida arbitrariamente. A chave do novo método proposto por Al Bastami, Belić e Petrović [1] é a introdução em (3) da mudança de variável $z = f(x)$ definida em (4). Tal mudança depende de coeficientes da EDO de Ricatti original e fica completamente definida pela escolha da função $B(x)$. Por outro lado, através de uma escolha ou hipóteses feitas sobre $z = f(x)$, é também possível (se $dz/dx \neq 0$) associar uma função $B(x)$ a ela correspondente através da relação:

$$B(x) = \frac{b(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Esta interdependência será importante na discussão do caso em que $A = 0$.

2.1 Caso A e $B > 0$ (constantes) e o Método de Chini

Note que no caso em que os coeficientes da EDO (5) são constantes, ela é facilmente resolvida. Al Bastami, Belić e Petrović [1] utilizaram (6) e a relação dos coeficientes $a(x)$ e $b(x)$ em (3) com os coeficientes originais $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ da EDO de Riccati original (2) para identificar uma condição necessária para que coeficientes da EDO (5) sejam constantes.

Multiplicando (6) por B, temos

$$b' + 2ab = \frac{4sA}{\sqrt{B}} b^{3/2}.$$

Isto é,

$$\frac{b'(x) + 2a(x)b(x)}{[b(x)]^{3/2}} = \frac{4sA}{\sqrt{B}} \tag{7}$$

e ao substituirmos em (7) $a(x) = -(Q + R'/R)$ e $b = PR$, chegamos na expressão

$$\frac{[P(x)R(x)]' - 2[Q(x) + (R(x)'/R(x))]P(x)R(x)}{[P(x)R(x)]^{3/2}} = \frac{4sA}{\sqrt{B}} \tag{8}$$

e a solução de (2) pode ser encontrada resolvendo (5).

Veremos agora como esta condição está diretamente ligada ao Método de Chini.

Para resolver uma equação diferencial na forma

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^n, \tag{9}$$

Kamke [5] refere-se a textos publicados por Chini [3, 4]. Caso exista uma constante α tal que $w = (P(x)/R(x))^{1/n}$ seja solução da equação linear

$$w' - Q(x)w = \alpha P(x), \tag{10}$$

então a mudança de variável $y = w(x)u$ transforma a (9) em uma equação diferencial de variáveis separáveis.

Quando $n = 2$, caso exista uma constante α tal que $w = (P(x)/R(x))^{1/2}$ seja solução da equação linear (10), então a mudança de variável $y = w(x)u$ transforma a EDO de Riccati (2) em

$$P(x)(u^2 + 1) = w'u - Q(x)wu + wu'$$
$$P(x)(u^2 - \alpha u + 1) = wu'$$

que é uma equação diferencial de variáveis separáveis.

No caso das equações de Riccati, Cheb-Terrab e Kolokolnikov [2] apontam que o método de Chini se reduz a verificar o caráter constante da expressão

$$\mathcal{I} \equiv \frac{P'(x)R(x) - P(x)R'(x) - 2P(x)Q(x)R(x)}{[P(x)R(x)]^{3/2}}. \tag{11}$$

O fato de $\mathcal{I}$ ser constante em (11) é equivalente a $w = (P(x)/R(x))^{1/2}$ ser uma solução de (9) para $n = 2$.

Al Bastami, Belić e Petrović [1] mostraram que se após aplicarem seu método a uma EDO de Riccati (2), os coeficientes da EDO (5) são constantes, então o quociente no lado esquerdo de (8) é constante. Consequentemente, $\mathcal{I}$ é constante em (11). Portanto, também é possível resolver (2) através de uma mudança de variável que transforma (2) em uma equação diferencial separável para u, onde $y = w(x)u$. É importante notar que no caso A e $B > 0$ (constantes), o método proposto por Al Bastami, Belić e Petrović [1] apresenta uma fórmula fechada para a solução da EDO de Ricatti.

2.2 Caso $A = 0$ e $B = B(x)$

Quando $A = 0$, a (5) torna-se

$$\frac{d^2u}{dz^2} + B(z)u = 0, \tag{12}$$

onde z é dada por (4) e $B(x)$ é uma função que Al Bastami, Belić e Petrović [1] alegam que é arbitrária mas que deve satisfazer

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{b}{B}\right)_0 \exp\left(-2\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right), \tag{13}$$

onde $a(x) = -(Q + R'/R)$ e $b = PR$ dependem dos coeficientes da equação de Riccati original.

De fato, segue-se de (13) que $B(x)$ já não é mais uma função arbitrária. É importante notar que em (4), a função $B(x)$ pode ser uma função arbitrária. Entretanto, se adicionamos a exigência de que $A = 0$, então devemos forçosamente escolher em (4) $B(x)$ tal que

$$B(x) = \left(\frac{B}{b}\right)_0 b(x)\exp\left(2\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right). \tag{14}$$

Isto é, para que $A = 0$, é necessário que na mudança de variável $z = f(x)$ definida em (4), tomemos B como definido em (14).

Finalmente, mostramos que qualquer equação de Riccati pertence ao segundo caso. Isto é, dada uma EDO de Riccati, sempre é possível escolher $B(x)$ em (4) tal que $A = 0$ em (5). Dada uma equação de Riccati $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$, opere a substituição $y = -u'/(uR)$ para reduzí-la a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \tag{15}$$

onde $a(x) = -(Q + R'/R)$ e $b = PR$.

Tome

$$B(x) = b(x)\exp\left(2\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right). \tag{16}$$

Com esta escolha, definimos por (4) a seguinte mudança de variável:

$$z = z_0 + s\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{b(\xi)}{B(\xi)}}d\xi = z_0 + s\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{b(\xi)}{b(\xi)\exp\left(2\int_{x_0}^{\xi} a(\mu)d\mu\right)}}d\xi.$$

Isto é,

$$z \equiv z_0 + s\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{\xi} a(\mu)d\mu\right)d\xi, \tag{17}$$

onde $s = \pm 1$. Como apresentado por Al Bastami, Belić e Petrović [1], observamos que

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

Levando estas expressões para (15), obtemos:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dz^2} + \left[\frac{d^2z}{dx^2} + a(x)\frac{dz}{dx}\right]\frac{du}{dz} + b(x)u = 0.$$

Isto é, podemos reescrever (15) nesta nova variável da seguinte maneira:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + 2A\frac{du}{dz} + Bu = 0, \tag{18}$$

onde

$$2A = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + a(x)\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \qquad \text{and} \qquad B = \frac{b(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Note que, por (17)

$$z' = s\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\mu)d\mu\right),$$
$$z'' = -sa(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\mu)d\mu\right).$$

Isto é,

$$\frac{d^2z}{dx^2} + a(x)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Portanto, $A = 0$. Isto é, para qualquer equação de Riccati é possível escolher B em (4) tal que $A = 0$ em (5). Ademais, com o mesmo argumento é possível ver que para que A seja igual a zero é suficiente escolher B em (4) satisfazendo (14). Assim, mostramos que para que A seja igual a zero é necessário e suficiente escolher B em (4) satisfazendo (14). Desse modo, caso B em (4) não satisfaça (14), encontramos $A \neq 0$ em (5).

3 Conclusões

Neste trabalho, analisamos o método de resolução de equações de Riccati proposto por Al Bastami, Belić e Petrović [1].O método considera dois casos. No primeiro caso, a classe de EDO de Riccati que podem ser resolvidas coincide com a que já são resolvidas pelo método de Chini com a vantagem de apresentar uma fórmula fechada para a solução da EDO de Ricatti. No segundo caso, não há a possibilidade alegada pelos autores de escolha arbitrária da função $B(x)$. A perda deste grau de liberdade não permite explorar a conexão da equação (12) com a equação de Schrödinger, na Mecânica Quântica, para potenciais para os quais existam soluções conhecidas como sugerido pelos autores proponentes do método. Além disso, para qualquer EDO de Riccati onde $P(x)R(x) > 0$ é possível escolher $B(x)$ de modo que a EDO resultante após a aplicação do método proposto em [1] pertença ao segundo caso por eles tratado.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Este trabalho também foi parcialmente apoiado pela FAPERJ.

Referências

[1] Al Bastami, A., Belić, M. R. e Petrović, N. Z. Special solutions of the Riccati equation with applications to the Gross-Pitaevskii nonlinear PDE, *EJDE*, 66:1-10, 2010, ISSN: 1072-6691.

[2] Cheb-Terrab, E. S., Kolokolnikov, T. First Order ODEs, Symmetries amd Linear Transformations *Eur. J. Appl. Math.*, 14:231-246, 2003. DOI:10.1017/s0956792503005126

[3] Chini, M. Sopra un'equazione differenziali del primo ordine, *Rendiconti Instituto Lombardo*, 58:237-246, 1925.

[4] Chini, M. Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali del primo ordine, *Rendiconti Instituto Lombardo*, 57:506-511, 1924.

[5] Kamke, E. *Differetialgleichungen lösungsmethoden und lösungen*, Springer-Verlag, 1977.

[6] Zhong, W-P., Xie, R-H., Belić, M. R., Petrović, N. Z. e Chen, G. Exact spatial soliton solutions of the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equation with distributed coefficients, *Physical Review A*, 78:023821, 2008.

