

PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO H_∞ COM FORMATAÇÃO DE MALHA VIA DML APLICADO EM UM HOVER

RENAN LIMA PEREIRA*, KARL HEINZ KIENTITZ*

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Eletrônica,
12228-900 São José dos Campos, SP, Brasil*

Emails: renanlimaster@gmail.com, kienitz@ita.br

Abstract— The purpose of this paper is to present the possible advantages of a H_∞ loop-shaping robust controller using LMIs (linear matrix inequalities) to solve the problem of tracking references and robust stability in a hover with three degrees of freedom. This hover system is a laboratory system produced by Quanser Consulting and simulates typical behaviors of an VTOL (vertical tanking-off landing) aircraft, also known as X4-flyer. The formulation adopted in this study consist in the H_∞ synthesis using a four-block framework. This formulation ensures closed-loop robust stability of the system against unstructured uncertainty described via coprime factorization. We present experimental results obtained with the implementation of the designed H_∞ loop-shaping controller.

Keywords— Robust Control, Coprime factorization, H_∞ loop-shaping, LMI.

Resumo— O propósito deste trabalho é apresentar as possíveis vantagens do emprego de um controlador robusto H_∞ com formatação de malha usando desigualdades matriciais lineares (DML) para resolver o problema de rastreamento de referências e estabilização robusta em um hover com três graus de liberdade. Este sistema foi produzido pela empresa *Quanser Consulting* a fim de simular comportamentos típicos de uma aeronave VTOL (*vertical taking-off landing*), também conhecido como *X4-flyer*. A formulação adotada neste estudo consiste na síntese H_∞ usando uma configuração de quatro blocos. Esta configuração garante a estabilidade robusta do sistema em malha fechada contra incerteza não-estruturada descrita via fatoração coprima. São apresentados resultados experimentais obtidos com o uso do controlador H_∞ .

Keywords— Controle Robusto, Fatoração coprima, H_∞ com formatação de malha, DML.

1 Introdução

As estratégias de projeto de controladores robustos baseadas em critérios de desempenho H_∞ podem resultar em vantagens sobre os métodos clássicos de projeto. Estas vantagens se devem fundamentalmente à obtenção dos compromissos entre desempenho e robustez para sistemas incertos. Combinando os conceitos do controle clássico e da otimização H_∞ , há o método H_∞ com formatação de malha introduzido por (McFalan and Glover, 1992). Este método tem-se mostrado eficaz e tem sido aplicado em vários problemas industriais e aeronáuticos.

O método compreende duas etapas sequenciais: a primeira consiste no escalonamento da planta multivariável e na seleção dos pré e pós-compensadores utilizados para moldar a resposta em frequência da planta. Assim, o engenheiro pode usar sua experiência e seu conhecimento das características da planta para obter um compromisso entre desempenho e estabilidade robusta.

Na segunda etapa, o raio de estabilidade da planta formatada ou moldada é otimizado em relação à incerteza em fatoração coprima. A razão para usar esta classe de incerteza é que esta inclui um amplo conjunto de incertezas não-estruturadas com várias configurações, por exemplo, na forma aditiva, multiplicativa etc (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Este trabalho apresenta resultados da investigação das possíveis vantagens do emprego de um controlador robusto H_∞ com formatação de malha usando desigualdades matriciais lineares (DML) para resolver o problema de rastreamento de referências e estabilização robusta em um hover com três graus de liberdade. Esse sistema é inspirado em uma aeronave VTOL (*vertical take-off and landing*), também conhecido como *X4-flyer*, e tem sido estudado em aplicações de veículos não-tripulados (Hamel et al., 2002; Lara et al., 2006; Bouabdallah and Murrieri, 2005; Cavalca 2008). A dinâmica do hover pode ser descrita por um modelo linearizado de sexta ordem tendo como variáveis de estado os ângulos de rolamento, arfagem, guinada e suas respectivas variações (velocidades).

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, descreve-se a planta didática. Na seção 3, apresenta-se a formulação do problema H_∞ com formatação de malha em quatro blocos. Na seção 4, descreve-se as etapas do projeto H_∞ com formatação de malha usando DML. Na seção 5 são apresentados os principais resultados obtidos, relativos à aplicação do controlador projetado, e a seção 6 traz a conclusão.

2 Planta didática Hover

Esta seção segue de perto a descrição apresentada em (Pereira and Kienitz, 2012). A planta didática Hover, mostrada na Figura 1, é formada por

uma estrutura fixa com quatro motores. O sistema é composto por um eixo articulado que permite rotações nos eixos de rolamento, arfagem e guinada (Figura 2). A base do sistema é fixada à bancada que possui anéis de deslizamento que permitem o movimento livre no eixo de guinada. Cada um dos motores gera uma força de empuxo que é usada no controle dos ângulos de rolamento e de arfagem. Desse modo, o torque resultante da rotação das hélices causam um movimento na estrutura em torno do eixo de guinada. Para o caso de um ambiente controlado, com as quatro forças equilibradas, o torque total é balanceado (Cavalca, 2008). Para este trabalho será considerado um modelo simplificado do sistema, conforme apresentado em (Quanser, 2005).

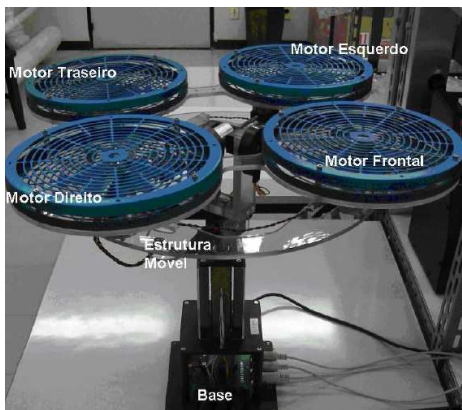


Figura 1: Planta didática Hover.

Quando uma tensão com polaridade adequada é aplicada em qualquer motor, gera-se em uma força de empuxo que causa uma elevação do conjunto propulsor (Cavalca and Kienitz, 2009). O conjunto formado pelos motores frontal e traseiro (com tensões v_f e v_b , respectivamente) causa um movimento nos eixos de arfagem e guinada, enquanto os motores laterais (analogamente v_r e v_l) movem o eixo de rolamento e de guinada (Cavalca, 2008).

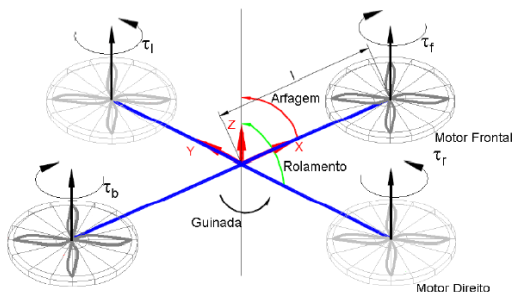


Figura 2: Dinâmica do Hover.

O sistema possui três *encoders* que fornecem medidas dos deslocamentos angulares nos três

eixos de liberdade da planta a partir da posição inicial. A resolução dos *encoders* é de 8192 pulsos por revolução e, portanto, apenas é possível medir variações de posição múltiplas de 0.0439 (graus).

Considerando o sistema desacoplado e linear, o movimento de arfagem pode ser descrito como:

$$J_{ph} \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} = l K_f (v_f - v_b), \quad (1)$$

onde, J_{ph} é o momento de inércia no eixo de arfagem, p_h é o ângulo de arfagem, l é a distância entre os motores e o eixo central e por último K_f é a constante força-tensão do motor. Analogamente, para o movimento de rolamento tem-se que:

$$J_{rh} \frac{\partial^2 r_h}{\partial t^2} = l K_f (v_r - v_l), \quad (2)$$

onde, J_{rh} é o momento de inércia no eixo de rolamento, r_h é o ângulo de rolamento. O torque gerado pelos motores frontais e traseiros denomina-se τ_f e τ_b ; similarmente o torque gerado pelos motores direito e esquerdo são dados por τ_r e τ_l . Para o movimento de guinada considera-se a seguinte dinâmica,

$$\begin{aligned} J_{yh} \frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2} &= \tau_f + \tau_b + \tau_r + \tau_l \\ J_{yh} \frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2} &= K_{t,c}(v_f + v_b) + K_{t,n}(v_r + v_l) \end{aligned} \quad (3)$$

com J_{yh} sendo o momento de inércia no eixo de guinada, y_h o ângulo de guinada, $K_{t,c}$ e $K_{t,n}$ constantes que relacionam o torque gerado pelo motor com tensão aplicada (Quanser, 2005).

2.1 Modelo nominal adotado

O modelo utilizado neste trabalho é descrito pela fabricante em (Quanser, 2005). Trata-se de um modelo simplificado, mas que se mostrou adequado para o projeto de controladores robustos. O modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio (motores alinhados com os eixos X , Y e Z , Figura 2) é dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4)$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{t,c}}{J_y} & \frac{K_{t,c}}{J_y} & \frac{K_{t,n}}{J_y} & \frac{K_{t,n}}{J_y} \\ l \frac{K_f}{J_p} & -l \frac{K_f}{J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \frac{K_f}{J_r} & -l \frac{K_f}{J_r} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Símbolo	Valor	Unidade
$K_{t,n}$	0.0036	$N.m/V$
$K_{t,c}$	-0.0036	$N.m/V$
K_f	0.1188	N/V
l	0.197	m
J_{yh}	0.110	$kg.m^2$
J_{ph}	0.0552	$kg.m^2$
J_{rh}	0.0552	$kg.m^2$

Tabela 1: Valores dos parâmetros da planta (Hover).

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Como não há transmissão direta entre a entrada e a saída da planta, tem-se $D = 0$. Os valores usados para os parâmetros da planta Hover estão apresentados na Tabela 1.

3 H_∞ com formatação de malha usando quatro blocos

Nesta seção, são descritos os procedimentos de projeto H_∞ com formatação de malha usando quatro blocos. Este projeto é baseado na combinação do problema de estabilização robusta com a clássica teoria de formatação de malha, conforme proposto por (McFarlane and Glover, 1992) e detalhado em (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

A seleção dos pré e pós-compensadores consiste em escolher adequadamente os elementos das matrizes W_2 e W_1 (ver Fig. 3), de tal forma que o produto W_2GW_1 forneça valores singulares de malha aberta desejáveis em função da frequência. O resultado desta formatação deve garantir a condição de estabilização robusta. Na segunda etapa do projeto determina-se um controlador H_∞ que satisfaça a seguinte condição,

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K)^{-1} \begin{bmatrix} G_s & I \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon} = \gamma, \quad (8)$$

onde ε é positivo e representa um limitante superior para a norma da incerteza. Sendo assim, o objetivo da estabilização robusta da planta nominal é garantir (8) para o maior ε possível, a fim de torná-la uma medida de robustez (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Na Figura 3, apresenta-se o diagrama do sistema formado pela planta formatada e pelo controlador estático K . Vale ressaltar, que o controlador de realimentação para a planta, G , consiste em $K_\infty = W_1 K W_2$.

Para descrever o problema H_∞ com formatação de malha usando quatro blocos em DML é necessário descrever a planta, $P_{4\#}$, da

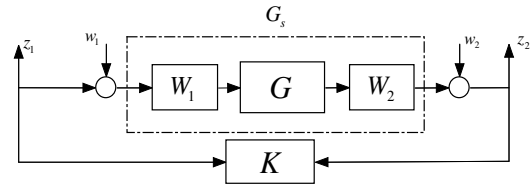


Figura 3: Diagrama de blocos da planta formatada e do controlador.

seguinte forma:

$$P_{4\#} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times n_y} & B & B \\ C & I_{n_y} & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} \\ 0_{n_u \times n} & 0_{n_u \times n_y} & 0_{n_u \times n_u} & I_{n_u} \\ C & I_{n_y} & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A partir da planta generalizada $P_{4\#}$ é possível apresentar as condições de síntese para o projeto H_∞ com formatação de malha usando quatro blocos.

Teorema 1 (S.Patra et al., 2008): Existe um controlador H_∞ com formatação de malha usando quatro blocos que satisfaz a equação 8, somente se $\beta > 1$ e existir uma matriz P positiva definida tal que

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T - \beta BB^T & PC^T \\ CP & -\beta I \end{pmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} M & B \\ B^T & -I_{n_u} \end{pmatrix} < 0 \quad (11)$$

com $M = AP + PA^T + ZC^T CZ - ZC^T CP - PC^T CZ$ sejam satisfeitas, onde Z é uma matriz positiva definida dada pela solução da seguinte equação de *Riccati*,

$$\begin{aligned} (A - BF^{-1}D^T C)Z + Z(A - BF^{-1}D^T C)^T \\ - ZC^T E^{-1} CZ + BF^{-1}B^T = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

onde $F = I + D^T D$ e $\beta = (\gamma^2 - 1)$. O teorema é demonstrado em (Patra et al., 2008).

Como descrito em (Patra et al., 2008) o ganho K pode ser encontrado resolvendo a seguinte desigualdade:

$$\Psi + \Omega K \Theta + \Theta^T K^T \Omega^T < 0 \quad (13)$$

onde,

$$\Psi = \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC^T & 0 & 0 & B \\ CR & -\gamma I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\gamma I & 0 \\ B^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_y \times n_u} \\ I_{n_u} \\ 0_{n_y \times n_u} \\ 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} RC^T \\ 0_{n_y \times n_y} \\ 0_{n_u \times n_u} \\ I_{n_y} \\ 0_{n_u \times n_y} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

e $R = \frac{1}{\gamma}P$, com P sendo solução de (10) e (11).

4 Projeto H_∞ com formatação de malha usando DML

O objetivo do controlador H_∞ com formatação de malha é resolver o problema de rastreamento de referências a fim de garantir um bom desempenho e a estabilidade apesar de distúrbios e ruídos.

4.1 Selecionando os Pré e Pós-Compensadores

Propõe-se que a matriz W_1 deve ser escolhida de tal forma que se obtenha altos ganhos em baixas frequências e *roll-off* de aproximadamente 20dB/década. Já para a matriz W_2 , usualmente escolhe-se uma constante, refletindo a importância relativa das saídas a serem controladas. Para este projeto escolheu-se os seguintes compensadores,

$$W_1 = \begin{bmatrix} \frac{s+0.3}{0.05s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s+0.5}{0.2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+0.8}{0.1s+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s+0.5}{0.03s+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$W_2 = \text{diag} [50.2 \quad 40 \quad 20 \quad 100.3] \quad (16)$$

Na Figura 4, apresenta-se a resposta em frequência da planta formatada em comparação com a planta nominal.

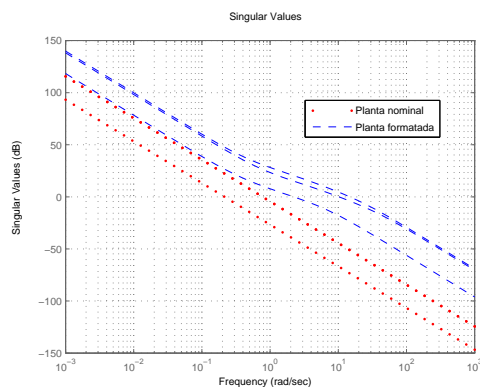


Figura 4: Valores singulares da planta nominal e da planta formatada.

Agora, o controlador K é sintetizado resolvendo o problema de estabilização robusta a partir da Equação (13) para a planta formatada $G_s = W_2GW_1$ com fatoração coprima normalizada. Desse modo, o controlador para a planta G é dado pela seguinte equação $K_\infty = W_1KW_2$. Abaixo apresenta-se um resumo da metodologia utilizada.

4.2 Procedimento de projeto

1. Selecione W_1 and W_2 para obter a malha aberta desejada e calcule a planta formatada $G_s = W_2GW_1$. Considere (A, B, C, D) uma realização de G_s .
2. A partir de (12) determine a matriz $Z > 0$ para resolver o sistema de DML (10), (11). Então determine β que satisfaz a margem de estabilidade robusta $\beta = (\gamma^2 - 1)$.
3. Se o sistema de DML (10) e (11) é factível, então determine a matriz de Lyapunov $P > 0$ e β para resolver a inequação (13).
4. Determine o controlador $K_\infty = W_1KW_2$ para implementação.

5 Resultados e Discussão

O procedimento de síntese descrito na seção 3 foi implementado usando os *softwares*: *Matlab* 7.10.0, *SeDuMi* e *Yalmip* (Lofberg, 2004). Aplicando o Teorema I, foram obtidos os seguintes resultados para a estabilidade robusta: $\beta = 4.9414$ e $\gamma = 2.4375$. Os resultados experimentais obtidos com o projeto H_∞ com formatação de malha usando DML são apresentados nas figuras que se seguem. A avaliação do projeto é apresentada a seguir através da análise na frequência e no tempo.

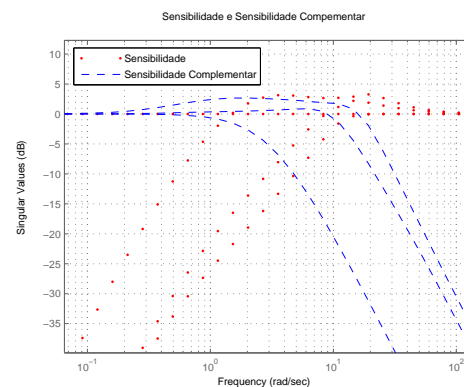


Figura 5: Sensibilidade e sensibilidade complementar da planta controlada.

A Figura 5 permite a avaliação do desempenho e estabilidade do controlador projetado para o controle do Hover. Nota-se claramente que o projeto H_∞ com formatação de malha usando DML obteve um desempenho e estabilidade robusta, visto que é importante que o pico da função de sensibilidade, M_s seja menor que 6dB e que da função de sensibilidade complementar, M_T seja menor que 2dB (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Em seguida, procede-se à análise dos resultados no domínio do tempo. A Figura 6 mostra a resposta ao degrau para os ângulos de guinada, arfagem e rolamento, respectivamente.

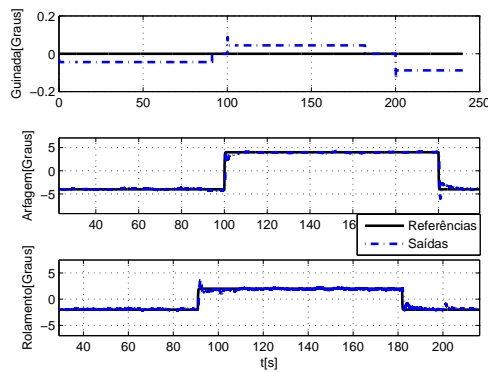


Figura 6: Resposta do sistema em malha fechada.

Analisando o tempo de estabilização e o *overshoot* para o controlador projetado observou-se que o controlador H_∞ com formatação de malha conseguiu um bom rastreamento das referências com erro inferior à 10%.

Finalmente, quanto aos sinais de controle, observou-se que, para o rastreo das referências, o controlador robusto gerou grandes amplitudes no motor esquerdo podendo levar à possíveis saturações no atuador. Enquanto o motor traseiro do Hover gerou amplitudes menores. Vale ressaltar que, para o problema de rastreamento das referências, somente dois motores foram utilizados, mostrando que o método investigado é uma excelente alternativa para controle de veículos não-tripulados.

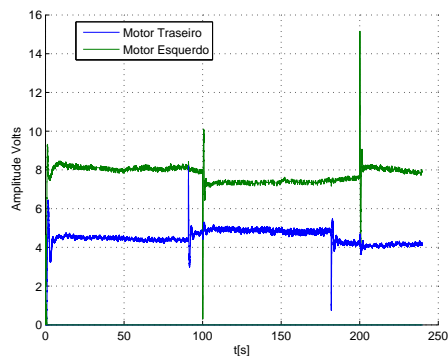


Figura 7: Sinal de controle dos motores.

6 Conclusões

Este trabalho discute o projeto de um controlador H_∞ com formatação de malha usando uma configuração de quatro blocos. Para a existência do controlador projetado um conjunto de condições são dadas em DML. Resultados experimentais demonstraram um bom desempenho e uma excelente robustez contra dinâmicas não modeladas. Por fim, conclui-se que os resultados obtidos nesta investigação sugerem

que este controlador pode ser uma interessante alternativa para aplicações de controle de aeronaves.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte da CAPES e da FAPESP (projeto 2011/17610-0).

Referências

- Bouabdallah S. and Murrieri P.(2005). Towards autonomous indoor micro Vtol, *Autonomous Robots*, Vol. 18, pp. 171–183.
- Cavalca, M. S. M (2008). *Controle Preditivo com Múltiplos Modelos para a Acomodação de Falhas*, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos.
- Cavalca, M. S. M. and Kienitz, K. H. (2009). Application of TFL/LTR robust control techniques to failure accommodation, *20th International Congress of Mechanical Engineering*, pp. 1–8.
- Hamel T. et al.(2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer, *15th Triennial World Congress*, pp. 637 – 641.
- Lara D. et al. (2006). Real-time embedded control system for Vtol aircrafts: Application to stabilize a quadrotor helicopter, *IEEE International Conference on Control Applications*, Munique.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *IEEE Intelligent Symposium on Computational Aided Control System.*, pp. 284–289.
- McFarlane, D. and K. Glover (1992). A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 759–769.
- Pereira, R. and Kienitz, K (2012). Projeto de um controlador robusto H_∞ loop-shaping de dois graus de liberdade aplicado em um hover, *Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1–6.
- Quanser. (2005). 3DOF Hover: User and Laboratory Manual, Canada.
- S. Patra, S. Sen, G. Ray (2008). Design of static H_∞ loop shaping controller in four-block framework using LMI approach, *Automatica*, Vol. 44, pp. 2214–2220.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable feedback control: analysis and design*, Chichester: John Wiley & Sons.