

# PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO $H_\infty$ COM FORMATAÇÃO DE MALHA VIA DML APLICADO EM UM HOVER

RENAN LIMA PEREIRA\*, KARL HEINZ KIENITZ\*

\*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Eletrônica,  
12228-900 São José dos Campos, SP, Brasil

Emails: [renanlimaster@gmail.com](mailto:renanlimaster@gmail.com), [kienitz@ita.br](mailto:kienitz@ita.br)

**Abstract**— The purpose of this paper is to present the possible advantages of a  $H_\infty$  loop-shaping robust controller using LMIs (linear matrix inequalities) to solve the problem of tracking references and robust stability in a hover with three degrees of freedom. This hover system is a laboratory system produced by Quanser Consulting and simulates typical behaviors of an VTOL (vertical taking-off landing) aircraft, also known as X4-flyer. The formulation adopted in this study consist in the  $H_\infty$  synthesis using a four-block framework. This formulation ensures closed-loop robust stability of the system against unstructured uncertainty described via coprime factorization. We present experimental results obtained with the implementation of the designed  $H_\infty$  loop-shaping controller.

**Keywords**— Robust Control, Coprime factorization,  $H_\infty$  loop-shaping, LMI.

**Resumo**— O propósito deste trabalho é apresentar as possíveis vantagens do emprego de um controlador robusto  $H_\infty$  com formatação de malha usando desigualdades matriciais lineares (DML) para resolver o problema de rastreamento de referências e estabilização robusta em um hover com três graus de liberdade. Este sistema foi produzido pela empresa *Quanser Consulting* a fim de simular comportamentos típicos de uma aeronave VTOL (*vertical taking-off landing*), também conhecido como *X4-flyer*. A formulação adotada neste estudo consiste na síntese  $H_\infty$  usando uma configuração de quatro blocos. Esta configuração garante a estabilidade robusta do sistema em malha fechada contra incerteza não-estruturada descrita via fatoração coprima. São apresentados resultados experimentais obtidos com o uso do controlador  $H_\infty$ .

**Keywords**— Controle Robusto, Fatoração coprima,  $H_\infty$  com formatação de malha, DML.

## 1 Introdução

As estratégias de projeto de controladores robustos baseadas em critérios de desempenho  $H_\infty$  podem resultar em vantagens sobre os métodos clássicos de projeto. Estas vantagens se devem fundamentalmente à obtenção dos compromissos entre desempenho e robustez para sistemas incertos. Combinando os conceitos do controle clássico e da otimização  $H_\infty$ , há o método  $H_\infty$  com formatação de malha introduzido por (McFalane and Glover, 1992). Este método tem-se mostrado eficaz e tem sido aplicado em vários problemas industriais e aeronáuticos.

O método compreende duas etapas sequenciais: a primeira consiste no escalonamento da planta multivariável e na seleção dos pré e pós-compensadores utilizados para moldar a resposta em frequência da planta. Assim, o engenheiro pode usar sua experiência e seu conhecimento das características da planta para obter um compromisso entre desempenho e estabilidade robusta.

Na segunda etapa, o raio de estabilidade da planta formatada ou moldada é otimizado em relação à incerteza em fatoração coprima. A razão para usar esta classe de incerteza é que esta inclui um amplo conjunto de incertezas não-estruturadas com várias configurações, por exemplo, na forma aditiva, multiplicativa etc (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Este trabalho apresenta resultados da investigação das possíveis vantagens do emprego de um controlador robusto  $H_\infty$  com formatação de malha usando desigualdades matriciais lineares (DML) para resolver o problema de rastreamento de referências e estabilização robusta em um hover com três graus de liberdade. Esse sistema é inspirado em uma aeronave VTOL (*vertical take-off and landing*), também conhecido como *X4-flyer*, e tem sido estudado em aplicações de veículos não-tripulados (Hamel et al., 2002; Lara et al., 2006; Bouabdallah and Murrieri, 2005; Cavalca 2008). A dinâmica do hover pode ser descrita por um modelo linearizado de sexta ordem tendo como variáveis de estado os ângulos de rolamento, arfagem, guinada e suas respectivas variações (velocidades).

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, descreve-se a planta didática. Na seção 3, apresenta-se a formulação do problema  $H_\infty$  com formatação de malha em quatro blocos. Na seção 4, descreve-se as etapas do projeto  $H_\infty$  com formatação de malha usando DML. Na seção 5 são apresentados os principais resultados obtidos, relativos à aplicação do controlador projetado, e a seção 6 traz a conclusão.

## 2 Planta didática Hover

Esta seção segue de perto a descrição apresentada em (Pereira and Kienitz, 2012). A planta didática Hover, mostrada na Figura 1, é formada por

uma estrutura fixa com quatro motores. O sistema é composto por um eixo articulado que permite rotações nos eixos de rolamento, arfagem e guinada (Figura 2). A base do sistema é fixada à bancada que possui anéis de deslizamento que permitem o movimento livre no eixo de guinada. Cada um dos motores gera uma força de empuxo que é usada no controle dos ângulos de rolamento e de arfagem. Desse modo, o torque resultante da rotação das hélices causam um movimento na estrutura em torno do eixo de guinada. Para o caso de um ambiente controlado, com as quatro forças equilibradas, o torque total é balanceado (Cavalca, 2008). Para este trabalho será considerado um modelo simplificado do sistema, conforme apresentado em (Quanser, 2005).

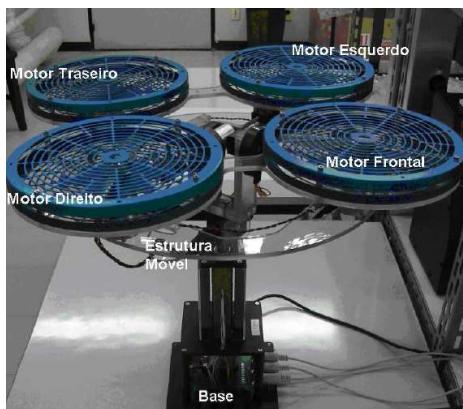


Figura 1: Planta didática Hover.

Quando uma tensão com polaridade adequada é aplicada em qualquer motor, gera-se em uma força de empuxo que causa uma elevação do conjunto propulsor (Cavalca and Kienitz, 2009). O conjunto formado pelos motores frontal e traseiro (com tensões  $v_f$  e  $v_b$ , respectivamente) causa um movimento nos eixos de arfagem e guinada, enquanto os motores laterais (analogamente  $v_r$  e  $v_l$ ) movem o eixo de rolamento e de guinada (Cavalca, 2008).

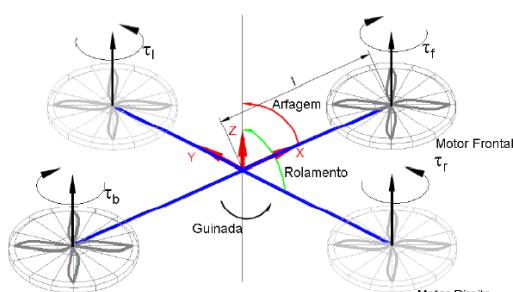


Figura 2: Dinâmica do Hover.

O sistema possui três *encoders* que fornecem medidas dos deslocamentos angulares nos três

eixos de liberdade da planta a partir da posição inicial. A resolução dos *encoders* é de 8192 pulsos por revolução e, portanto, apenas é possível medir variações de posição múltiplas de 0.0439 (graus).

Considerando o sistema desacoplado e linear, o movimento de arfagem pode ser descrito como:

$$J_{ph} \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} = l K_f (v_f - v_b), \quad (1)$$

onde,  $J_{ph}$  é o momento de inércia no eixo de arfagem,  $p_h$  é o ângulo de arfagem,  $l$  é a distância entre os motores e o eixo central e por último  $K_f$  é a constante força-tensão do motor. Analogamente, para o movimento de rolamento tem-se que:

$$J_{rh} \frac{\partial^2 r_h}{\partial t^2} = l K_f (v_r - v_l), \quad (2)$$

onde,  $J_{rh}$  é o momento de inércia no eixo de rolamento,  $r_h$  é o ângulo de rolamento. O torque gerado pelos motores frontais e traseiros denomina-se  $\tau_f$  e  $\tau_b$ ; similarmente o torque gerado pelos motores direito e esquerdo são dados por  $\tau_r$  e  $\tau_l$ . Para o movimento de guinada considera-se a seguinte dinâmica,

$$\begin{aligned} J_{yh} \frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2} &= \tau_f + \tau_b + \tau_r + \tau_l \\ J_{yh} \frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2} &= K_{t,c}(v_f + v_b) + K_{t,n}(v_r + v_l) \end{aligned} \quad (3)$$

com  $J_{yh}$  sendo o momento de inércia no eixo de guinada,  $y_h$  o ângulo de guinada,  $K_{t,c}$  e  $K_{t,n}$  constantes que relacionam o torque gerado pelo motor com tensão aplicada (Quanser, 2005).

### 2.1 Modelo nominal adotado

O modelo utilizado neste trabalho é descrito pela fabricante em (Quanser, 2005). Trata-se de um modelo simplificado, mas que se mostrou adequado para o projeto de controladores robustos. O modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio (motores alinhados com os eixos X, Y e Z, Figura 2) é dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4)$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{t,c}}{J_y} & \frac{K_{t,c}}{J_y} & \frac{K_{t,n}}{J_y} & \frac{K_{t,n}}{J_y} \\ l \frac{K_f}{J_p} & -l \frac{K_f}{J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \frac{K_f}{J_r} & -l \frac{K_f}{J_r} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Símbolo	Valor	Unidade
$K_{t,n}$	0.0036	$N.m/V$
$K_{t,c}$	-0.0036	$N.m/V$
$K_f$	0.1188	$N/V$
$l$	0.197	$m$
$J_{yh}$	0.110	$kg.m^2$
$J_{ph}$	0.0552	$kg.m^2$
$J_{rh}$	0.0552	$kg.m^2$

Tabela 1: Valores dos parâmetros da planta (Hover).

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Como não há transmissão direta entre a entrada e a saída da planta, tem-se  $D = 0$ . Os valores usados para os parâmetros da planta Hover estão apresentados na Tabela 1.

### 3 $H_\infty$ com formatação de malha usando quatro blocos

Nesta seção, são descritos os procedimentos de projeto  $H_\infty$  com formatação de malha usando quatro blocos. Este projeto é baseado na combinação do problema de estabilização robusta com a clássica teoria de formatação de malha, conforme proposto por (McFarlane and Glover, 1992) e detalhado em (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

A seleção dos pré e pós-compensadores consiste em escolher adequadamente os elementos das matrizes  $W_2$  e  $W_1$  (ver Fig. 3), de tal forma que o produto  $W_2 G W_1$  forneça valores singulares de malha aberta desejáveis em função da frequência. O resultado desta formatação deve garantir a condição de estabilização robusta. Na segunda etapa do projeto determina-se um controlador  $H_\infty$  que satisfaça a seguinte condição,

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K)^{-1} \begin{bmatrix} G_s & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon} = \gamma, \quad (8)$$

onde  $\varepsilon$  é positivo e representa um limitante superior para a norma da incerteza. Sendo assim, o objetivo da estabilização robusta da planta nominal é garantir (8) para o maior  $\varepsilon$  possível, a fim de torná-la uma medida de robustez (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Na Figura 3, apresenta-se o diagrama do sistema formado pela planta formatada e pelo controlador estático  $K$ . Vale ressaltar, que o controlador de realimentação para a planta,  $G$ , consiste em  $K_\infty = W_1 K W_2$ .

Para descrever o problema  $H_\infty$  com formatação de malha usando quatro blocos em DML é necessário descrever a planta,  $P_{4\#}$ , da

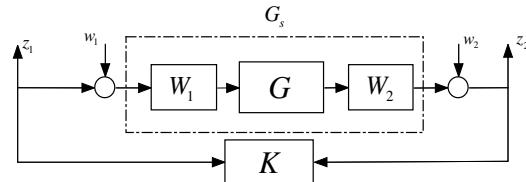


Figura 3: Diagrama de blocos da planta formatada e do controlador.

seguinte forma:

$$P_{4\#} = \begin{bmatrix} A & 0_{n_y \times n_y} & B & B \\ C & I_{n_y} & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} \\ 0_{n_u \times n} & 0_{n_u \times n_y} & 0_{n_u \times n_u} & I_{n_u} \\ C & I_{n_y} & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A partir da planta generalizada  $P_{4\#}$  é possível apresentar as condições de síntese para o projeto  $H_\infty$  com formatação de malha usando quatro blocos.

*Teorema I (S.Patra et al., 2008):* Existe um controlador  $H_\infty$  com formatação de malha usando quatro blocos que satisfaz a equação 8, somente se  $\beta > 1$  e existir uma matriz  $P$  positiva definida tal que

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T - \beta BB^T & PC^T \\ CP & -\beta I \end{pmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} M & B \\ B^T & -I_{n_u} \end{pmatrix} < 0 \quad (11)$$

com  $M = AP + PA^T + ZC^TCZ - ZC^TCP - PC^TCZ$  sejam satisfeitas, onde  $Z$  é uma matriz positiva definida dada pela solução da seguinte equação de *Riccati*,

$$\begin{aligned} & (A - BF^{-1}D^T C)Z + Z(A - BF^{-1}D^T C)^T \\ & - ZC^T E^{-1}CZ + BF^{-1}B^T = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $F = I + D^T D$  e  $\beta = (\gamma^2 - 1)$ . O teorema é demonstrado em (Patra et al., 2008).

Como descrito em (Patra et al., 2008) o ganho  $K$  pode ser encontrado resolvendo a seguinte desigualdade:

$$\Psi + \Omega K \Theta + \Theta^T K^T \Omega^T < 0 \quad (13)$$

onde,

$$\Psi = \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC^T & 0 & 0 & B \\ CR & -\gamma I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\gamma I & 0 \\ B^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_y \times n_u} \\ I_{n_u} \\ 0_{n_y \times n_u} \\ 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} RC^T \\ 0_{n_y \times n_y} \\ 0_{n_u \times n_u} \\ I_{n_y} \\ 0_{n_u \times n_y} \end{bmatrix}^T$$

e  $R = \frac{1}{\gamma}P$ , com  $P$  sendo solução de (10) e (11).

#### 4 Projeto $H_\infty$ com formatação de malha usando DML

O objetivo do controlador  $H_\infty$  com formatação de malha é resolver o problema de rastreamento de referências a fim de garantir um bom desempenho e a estabilidade apesar de distúrbios e ruídos.

##### 4.1 Selecionando os Pré e Pós-Compensadores

Propõe-se que a matriz  $W_1$  deve ser escolhida de tal forma que se obtenha altos ganhos em baixas frequências e *roll-off* de aproximadamente 20dB/década. Já para a matriz  $W_2$ , usualmente escolhe-se uma constante, refletindo a importância relativa das saídas a serem controladas. Para este projeto escolheu-se os seguintes compensadores,

$$W_1 = \begin{bmatrix} \frac{s+0.3}{0.05s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s+0.5}{0.2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+0.8}{0.1s+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s+0.5}{0.03s+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$W_2 = \text{diag} [ 50.2 \ 40 \ 20 \ 100.3 ] \quad (16)$$

Na Figura 4, apresenta-se a resposta em frequência da planta formatada em comparação com a planta nominal.

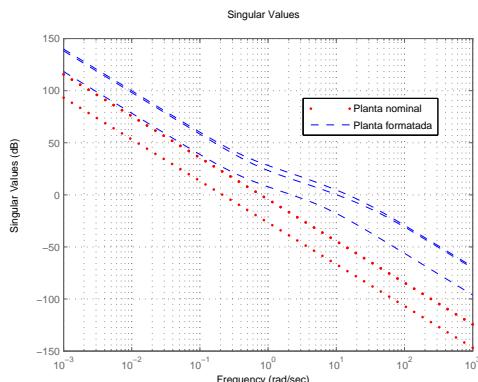


Figura 4: Valores singulares da planta nominal e da planta formatada.

Agora, o controlador  $K$  é sintetizado resolvendo o problema de estabilização robusta a partir da Equação (13) para a planta formatada  $G_s = W_2 G W_1$  com fatoração coprima normalizada. Desse modo, o controlador para a planta  $G$  é dado pela seguinte equação  $K_\infty = W_1 K W_2$ . Abaixo apresenta-se um resumo da metodologia utilizada.

#### 4.2 Procedimento de projeto

1. Selecione  $W_1$  and  $W_2$  para obter a malha aberta desejada e calcule a planta formatada  $G_s = W_2 G W_1$ . Considere  $(A, B, C, D)$  uma realização de  $G_s$ .
2. A partir de (12) determine a matriz  $Z > 0$  para resolver o sistema de DML (10), (11). Então determine  $\beta$  que satisfaz a margem de estabilidade robusta  $\beta = (\gamma^2 - 1)$ .
3. Se o sistema de DML (10) e (11) é factível, então determine a matriz de Lyapunov  $P > 0$  e  $\beta$  para resolver a inequação (13).
4. Determine o controlador  $K_\infty = W_1 K W_2$  para implementação.

#### 5 Resultados e Discussão

O procedimento de síntese descrito na seção 3 foi implementado usando os *softwares*: *Matlab* 7.10.0, *SeDuMi* e *Yalmip* (Lofberg, 2004). Aplicando o Teorema I, foram obtidos os seguintes resultados para a estabilidade robusta:  $\beta = 4.9414$  e  $\gamma = 2.4375$ . Os resultados experimentais obtidos com o projeto  $H_\infty$  com formatação de malha usando DML são apresentados nas figuras que se seguem. A avaliação do projeto é apresentada a seguir através da análise na frequência e no tempo.

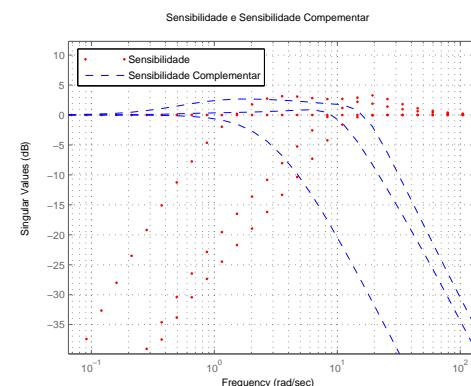


Figura 5: Sensibilidade e sensibilidade complementar da planta controlada.

A Figura 5 permite a avaliação do desempenho e estabilidade do controlador projetado para o controle do Hover. Nota-se claramente que o projeto  $H_\infty$  com formatação de malha usando DML obteve um desempenho e estabilidade robusta, visto que é importante que o pico da função de sensibilidade,  $M_s$  seja menor que 6dB e que da função de sensibilidade complementar,  $M_T$  seja menor que 2dB (Skogestad and Postlethwaite, 2001).

Em seguida, procede-se à análise dos resultados no domínio do tempo. A Figura 6 mostra a resposta ao degrau para os ângulos de guinada, arfagem e rolamento, respectivamente.

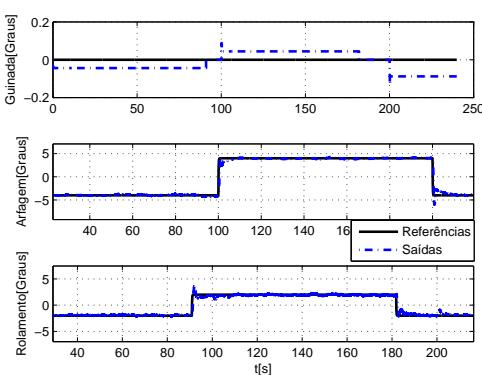


Figura 6: Resposta do sistema em malha fechada.

Analisando o tempo de estabilização e o *overshoot* para o controlador projetado observar-se que o controlador  $H_\infty$  com formatação de malha consseguiu um bom rastreamento das referências com erro inferior à 10%.

Finalmente, quanto aos sinais de controle, observou-se que, para o rastreio das referências, o controlador robusto gerou grandes amplitudes no motor esquerdo podendo levar à possíveis saturações no atuador. Enquanto o motor traseiro do Hover gerou amplitudes menores. Vale ressaltar que, para o problema de rastreamento das referências, somente dois motores foram utilizados, mostrando que o método investigado é uma excelente alternativa para controle de veículos não-tripulados.

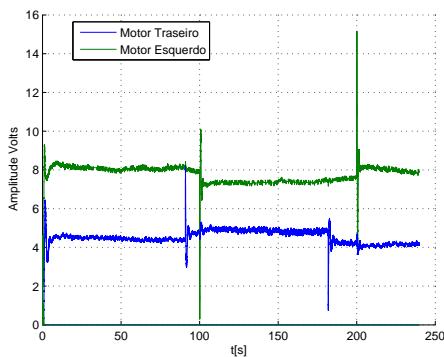


Figura 7: Sinal de controle dos motores.

## 6 Conclusões

Este trabalho discute o projeto de um controlador  $H_\infty$  com formatação de malha usando uma configuração de quatro blocos. Para a existência do controlador projetado um conjunto de condições são dadas em DML. Resultados experimentais demonstraram um bom desempenho e uma excelente robustez contra dinâmicas não modeladas. Por fim, conclui-se que os resultados obtidos nesta investigação sugerem

que este controlador pode ser uma interessante alternativa para aplicações de controle de aeronaves.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte da CAPES e da FAPESP (projeto 2011/17610-0).

## Referências

- Bouabdallah S. and Murrieri P. (2005). Towards autonomous indoor micro Vtol, *Autonomous Robots*, Vol. 18, pp. 171–183.
- Cavalca, M. S. M (2008). *Controle Preditivo com Múltiplos Modelos para a Acomodação de Falhas*, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos.
- Cavalca, M. S. M. and Kienitz, K. H. (2009). Application of TFL/LTR robust control techniques to failure accommodation, *20th International Congress of Mechanical Engineering*, pp. 1–8.
- Hamel T. et al.(2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer, *15th Triennial World Congress*, pp. 637 – 641.
- Lara D. et al. (2006). Real-time embedded control system for Vtol aircrafts: Application to stabilize a quadrotor helicopter, *IEEE International Conference on Control Applications*, Munique.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *IEEE Intelligent Symposium on Computacional Aided Control System.*, pp. 284–289.
- McFarlane, D. and K. Glover (1992). A loop shaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 759–769.
- Pereira, R. and Kienitz, K (2012). Projeto de um controlador robusto  $H_\infty$  loop-shaping de dois graus de liberdade aplicado em um hover, *Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1–6.
- Quanser. (2005). 3DOF Hover: User and Laboratory Manual, Canada.
- S. Patra, S. Sen, G. Ray (2008). Design of static  $H_\infty$  loop shaping controller in four-block framework using LMI approach, *Automatica*, Vol. 44, pp. 2214–2220.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable feedback control: analysis and design*, Chichester: John Wiley & Sons.