Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Medidas invariantes para aplicações unimodais

Belmiro Galo da Silva
Depto de Matemática Aplicada, IME, USP,
05508-090, Rua do Matão, 1010, São Paulo, SP
E-mail: belmiro@ime.usp.br

Resumo: *Neste trabalho estudamos medidas invariantes para aplicações unimodais. Estamos especialmente interessados em detectar as situações que levam uma aplicação unimodal a não possuir uma medida piac, ou seja, uma medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.*

Mostramos que a ordem do ponto crítico e a sua capacidade de recorrência são os fatores mais relevantes nesta questão. Os valores das derivadas da aplicação nos pontos periódicos tem uma influência menor, mas suficiente para garantir que numa mesma classe de conjugação topológica podem existir duas aplicações unimodais com ponto crítico de mesma ordem, sendo que uma delas possui medida piac e a outra não possui. A capacidade de recorrência do ponto crítico, talvez o principal fator nesta questão, depende de aspectos combinatórios bem sofisticados. As ferramentas principais para analisar estes aspectos envolvem os conceitos de tempos de corte e de aplicações kneading.

A existência ou não de medidas piac é uma propriedade de natureza métrica, e por isto, é necessário que tenhamos controle de como os iterados da aplicação unimodal distorcem a medida de Lebesgue. Então precisamos usar ferramentas de controle de distorção que incluem principalmente os Princípios de Koebe. Um ponto culminante deste trabalho diz respeito a relação entre existência de medida piac e existência de atratores selvagens, isto é, atratores métricos que não são atratores topológicos e vice-versa[3]. Usamos aqui um argumento probabilístico de rara beleza.

Palavras-chave: *aplicação unimodal, aplicação kneading, medida invariante, atrator.*

O assunto a ser tratado neste trabalho se insere no contexto de dinâmica unidimensional e diz respeito a iterações de aplicações unimodais.

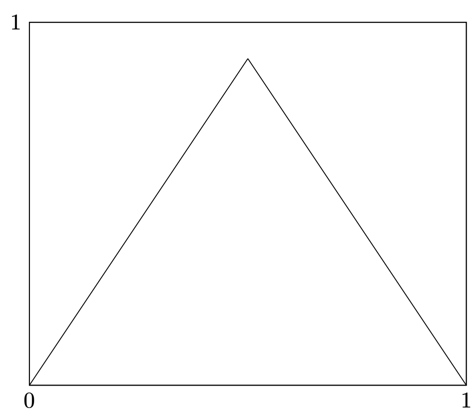

Figura 1: Uma aplicação unimodal tenda

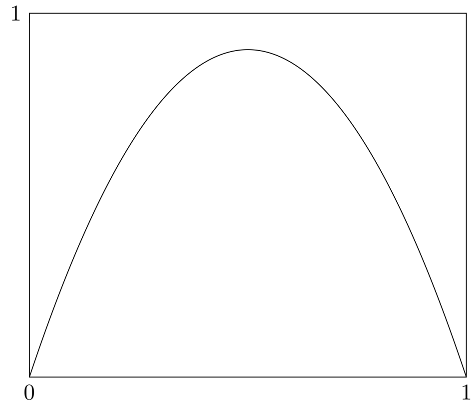

Figura 2: Uma aplicação unimodal quadrática

Uma aplicação contínua de um intervalo fechado I nele próprio, $f : I \to I$, é chamada de *aplicação unimodal* quando possui um único extremo local no interior de I. Este ponto pode ser um ponto de máximo ou de mínimo local e é denotado pela letra c. Quando f é de classe C^1, este extremo local é um ponto crítico, o qual assumiremos ser o único ponto crítico de f. Assumimos também, sem perda de generalidade, que f aplica o bordo de I em um único ponto do bordo de I.

As *aplicações tendas*

$$T_\alpha(x) = \min\{\alpha x, \alpha(1-x)\}$$

e as *aplicações quadráticas*

$$q_\alpha(x) = 2\alpha x(1-x),$$

onde $x \in I = [0,1]$ e α é um parâmetro que varia em $]0,2]$, são os exemplos mais populares de aplicação unimodal (veja as figuras acima).

O extremo local (ou ponto crítico) $c \in I$ de uma aplicação unimodal f desempenha um papel fundamental para a descrição das propriedades topológicas e métricas da sua dinâmica. A ordem deste ponto crítico, a maneira pela a qual a sua órbita positiva está ordenada no intervalo e o seu grau de recorrência são de grande relevância para aspectos topológicos e métricos desta dinâmica. Dadas duas aplicações unimodais f e g, um homeomorfismo h do intervalo I tal que $h \circ f = g \circ h$ é chamado de *conjugação topológica* entre f e g. Neste caso, dizemos que f e g são *topologicamente conjugadas*. Uma conjugação topológica preserva as propriedades topológicas da dinâmica mas, muitas vezes não preserva a medida de Lebesgue de conjuntos invariantes, por exemplo. Também não preservam outras propriedades métricas como a propriedade de possuir uma medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Este é um dos temas que exploramos neste trabalho.

Dizemos que o extremo local (ou ponto crítico) c de uma aplicação unimodal f tem ordem $\ell \geq 1$, se existem constantes $0 < O_1 \leq O_2$ tais que para todo $x \in I$ vale que:

$$O_1|x-c|^\ell \leq |f(x) - f(c)| \leq O_2|x-c|^\ell.$$

Observamos que se f é de classe C^2, então a razão O_2/O_1 pode ser escolhida tão próxima de 1 quanto se queira, para isto é necessário escolher x suficientemente próximo de c.

Uma medida μ definida na σ-álgebra de Borel do intervalo I é dita *invariante* por uma aplicação unimodal f se $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, para todo boreliano $A \subset I$. Se $\mu(I) = 1$ dizemos que μ é uma *medida de probabilidade*, por brevidade, dizemos apenas probabilidade.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0011

Uma aplicação unimodal sempre possui muitas medidas de probabilidade invariantes mas, muitas delas não são interessantes. Dentre as medidas invariantes que são interessantes está a medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue às quais nos referimos como medidas piac. Estas são as medidas de probabilidade invariantes que são positivas em todos os borelianos que tem medida de Lebesgue positiva. Por exemplo, uma aplicação tenda T_α, para $\alpha > 1$, sempre possui uma medida piac.

Por outro lado, existem aplicações quadráticas que são topologicamente conjugadas à aplicações tendas mas que não possuem medidas piac. Ainda mais surpreendente é que existem aplicações unimodais f e g analíticas, com ponto crítico de ordem 2, topologicamente conjugadas tais que f possui uma medida piac e g não possui. Na verdade estas aplicações f e g podem ser escolhidas nas famílias $f_\beta(x) = \beta \sin(\pi x)$ e $q_\alpha(x) = 2\alpha x(1-x)$, respectivamente. Este é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema A.[1] *Existem aplicações unimodais q_α que possuem uma medida piac e são topologicamente conjugadas a aplicações unimodais f_β que não possuem medida piac.*

Uma conjugação topológica entre aplicações unimodais como no teorema A aplica um conjunto de medida de Lebesgue positiva em um conjunto com medida de Lebesgue nula. De acordo com este teorema, existem outros fatores além da ordem do ponto crítico e a classe de conjugação topológica que estão relacionados com a existência ou não de uma medida piac. Veremos que os autovalores da derivada da aplicação unimodal nos seus pontos periódicos também tem influência nesta propriedade. O tipo topológico das aplicações unimodais que construímos para provar o teorema acima é muito especial, mesmo fazendo simulações muito precisas dão a impressão que estas aplicações possuem pontos periódicos atratores. Na verdade elas possuem o que chamamos de "retornos selas-nó" que são muito longos e em particular os seus pontos críticos são fortemente recorrentes.

Aspectos métricos da dinâmica de uma aplicação unimodal f de classe C^1 depende de uma competição entre uma certa expansividade que ocorre em regiões mais afastadas do ponto crítico e uma contração arbitrariamente grande em regiões próximas deste ponto. A medida que iteramos f a expansividade tende a ganhar da contração, a menos que esta última se realimente muito frequentemente. Isto depende da força de recorrência do ponto crítico que pode ser medida através da sequência de tempos de primeira aproximação do ponto crítico. No entanto, não é claro quais são as sequências de inteiros positivos que podem ser realizadas como sequência de primeira aproximação para alguma aplicação unimodal f. Passamos então a analisar a órbita negativa do ponto crítico que também é bem natural uma vez que ela determina os pontos críticos das iteradas f^n.

Os intervalos $J_n \subset I$, máximos nos quais f^n é monótona, são chamados de *intervalos de monotonicidade*. Observe que o bordo de um intervalo de monotonicidade J_n são pontos da órbita negativa de c ou estão no bordo de I. Já os pontos do bordo de $f^n(J_n)$ pertencem a órbita crítica positiva. Em particular, sempre existe $0 \le i < n$ tal que o bordo de $f^i(J_n)$ contém o ponto crítico c. Sendo assim dedicamos mais atenção aos intervalos de monotonicidade cujo bordo contém c. Se J_n é um tal intervalo, chamamos a restrição $f^n_{|J_n}$ de *ramo central*. Para cada $n \ge 1$, sempre existem dois ramos centrais com a mesma imagem. Se esta imagem contém c dizemos que n é um *tempo de corte*. Denotamos por $\{S_k\}_{k\ge 0}$ a sequência dos tempos de corte de f e por $\{J_{S_k}\}_{k\ge 0}$, a correspondente sequência dos domínios dos ramos centrais a esquerda de c. Observe que se a imagem do bordo de I não é um atrator periódico, então f possui um ponto fixo que inverte orientação. Se este ponto também não é um atrator periódico, então $S_0 = 1$ e $J_{s_0} = (0, c)$. Existe o ponto $z_0 \in J_{s_0}$ tal que $f^{S_0}(z_0) = c$. Em geral, existe $z_k \in J_{S_{k-1}}$ tal que $f^{S_k}(z_k) = c$. A sequência $\{z_k\}_{k\ge 0}$ é constituída de pontos da órbita negativa de c e são chamados de *pontos pré-críticos mais próximos*. Também consideramos a sequência $\{\hat{z}_k\}_{k\ge 0}$, onde $\hat{z}_k > c$ são tais que $f^{S_k}(z_k) = f^{S_k}(\hat{z}_k) = c$.

Quanto menores forem os tempos de primeira aproximação mais fortemente recorrente será

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0011

o ponto c. Existem aplicações unimodais tais que os tempos de primeira aproximação são $S_0 = 1,\ S_1 = 2,\ S_2 = 2^2, \ldots, S_i = 2^i, \ldots$ são chamadas de aplicações de Feigenbaum-Tresser. Aquelas em que estes tempos são os números de Fibonacci, a saber $S_0 = 1,\ S_1 = 2$ e $S_{i+1} = S_i + S_{i-1}$, são chamadas de aplicações de Fibonacci. Dentre as aplicações unimodais que não possuem órbita periódica atratora, as aplicações de Feigenbaum-Tresser são as que tem o extremo local c mais fortemente recorrente. A aplicação de Fibonacci são as que tem o extremo local c mais fortemente recorrente dentre as que são topologicamente conjugadas com uma tenda sem intervalo periódico. O conjunto ω-limite de c, tanto para as aplicações de Feigenbaum-Tresser como para as aplicações de Fibonacci são conjuntos de Cantor invariantes.

Agora, inspirados nas ideias de Milnor-Thurston [4] passamos a associar a cada ponto do intevalo uma sequência infinita, chamada itinerário do ponto:

Sejam $f : I \to I$ uma aplicação unimodal e $x \in I$. O *itinerário* de x, denotado por $\nu(x)$, é a sequência infinita

$$\nu_f(x) = (\nu_1(x)\ \nu_2(x)\ \nu_3(x)\ \cdots),$$

em que

$$\nu_i(x) = \begin{cases} 0 & se \quad f^i(x) \in [0, c), \\ c & se \quad f^i(x) = c, \\ 1 & se \quad f^i(x) \in (c, 1]. \end{cases}$$

Como o ponto crítico é especial, o destacamos dando um nome especial para o itinerário do valor crítico c, a saber: $\nu_f(c) = (\nu_1(c)\ \nu_2(c)\ \nu_3(c)\ \cdots)$ que é chamado *sequência kneading* e é denotado por k_f.

Construiremos um algorítmo para o itinerário do valor crítico da f a fim de garantirmos a existência da medida piac da f. Além disso, como devemos ter $k_f = k_g$ para que f e g sejam topologicamente conjugadas esta construção específica tem que garantir a não existência de medida piac para a aplicação g para garantirmos a validade do teorema A.

Utilizando o software *mathematica* pude construir uma rotina que mostra a existência de parâmetros para as aplicações $f_\beta(x) = \beta \sin(\pi x)$ e $q_\alpha(x) = 2\alpha x(1-x)$ que as tornam conjugadas e estão de acordo com a construção do algorítmo.

Seja $\Lambda \subseteq I$, um conjunto compacto e invariante por uma aplicação unimodal f. Definimos a *bacia* de Λ como sendo o conjunto: $\mathcal{B}(\Lambda) = \{x \in I : \omega(x) = \Lambda\}$.

Para as aplicações unimodais $f = q_\alpha$ e $g = f_\beta$ do teorema A, $c = 1/2$ é o ponto crítico e os intervalos $\Lambda_f = [f^2(c), f(c)]$ e $\Lambda_g = [g^2(c), g(c)]$ são compactos invariantes e transitivos para f e g, respectivamente. Além disto, as bacias $\mathcal{B}(\Lambda_f)$ e $\mathcal{B}(\Lambda_g)$ são *conjuntos genéricos*, a saber: são interseção de subconjuntos abertos e densos do intervalo I. Resta saber se estas bacias tem medida de Lebesgue positiva ou não.

Existem aplicações unimodais como as aplicações de Feigenbaum-Tresser que possuem intervalos $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \ldots$ periódicos com períodos $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ Estas aplicações são chamadas de *infinitamente renormalizáveis*. Se f é uma tal aplicação, o conjunto

$$\Lambda_f = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{k_i-1} f^j(J_i),$$

chamado *solenóide*, é compacto, invariante, coincide com o conjunto ω-limite do extremo local c e a órbita positiva de todo $x \in \Lambda_f$ é densa em Λ_f. Neste caso dizemos que Λ_f é um conjunto *minimal* e portanto é um conjunto de Cantor. Também sabemos que se f é uma aplicação infinitamente renormalizável de classe C^2 e o seu ponto crítico tem ordem finita, então a medida de Lebesgue de Λ_f é nula. Porém, a bacia de Λ_f é um conjunto genérico com medida de Lebesgue total. Em particular, este tipo de aplicação unimodal não possui medida piac.

Observamos que as aplicações tendas são finitamente renormalizáveis, ou seja, possuem no máximo uma quantidade finita de intervalos periódicos. Enquanto que o conjunto ω-limite do seu extremo local $c = 1/2$ pode ser um conjunto de Cantor invariante e minimal. Porém a bacia deste conjunto é um conjunto magro (ou seja, união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio) com medida de Lebesgue nula. Aplicações tendas T_α com $\alpha > 1$, sempre possui uma medida piac. No entanto, resta saber se existem aplicações unimodais f de classe C^∞, com ponto crítico de ordem finita e topologicamente conjugadas à aplicações tendas, que exibem conjuntos invariantes minimais Λ_f cuja bacia $\mathcal{B}(\Lambda_f)$ tem medida de Lebesgue positiva. Este é o conteúdo do teorema a seguir. Para enunciá-lo vamos considerar as aplicações unimodais da forma $g_\gamma(x) = \gamma - x^{2\ell}$, para $\ell > 1$ e γ escolhido de modo que g_γ possui um intervalo invariante $I = I_\gamma$.

Teorema B.[2] *Se g_γ é aplicação de Fibonacci e ℓ é suficientemente grande, o conjunto ω-limite do seu ponto crítico é um conjunto de Cantor minimal de medida Lebesgue nula cuja bacia tem medida de Lebesgue total.*

As aplicações $g = g_\gamma$ do teorema B são topologicamente conjugadas com aplicações tendas, não possuem intervalos periódicos, o intervalo $[g^2(c), g(c)]$ é invariante, transitivo e sua bacia é um conjunto genérico com medida de Lebesgue nula.

Referências

[1] H. Bruin, The existence of absolutely continuous invariant measures is not a topological invariant for unimodal maps, *Ergodic theory and dynamical systems*, 18(1998) 555-565.

[2] H. Bruin, G. Keller, T. Nowicki e S. van Strien, Wild Cantor attractors exist, *Ann. Math.*, 143(1996) 97-130.

[3] J. Milnor, On the Concept of Attractor, *Commun. Math. Phys.*, 99(1985) 177-195.

[4] J. Milnor e W. Thurston, On iterated maps of the interval, *Dynamical Systems*, 18(1988) 465-563.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0011