

Singularidades de aplicações entre superfícies fechadas

Catarina Mendes de Jesus Sanchez¹
DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo. Neste trabalho foi introduzido o estudo de aplicações de superfícies fechadas sobre uma superfície não orientada N com gênero maior que um. Os resultados obtidos para aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo, em [5], foram estendidos para aplicações na garrafa de Klein e também para superfícies não orientadas com gênero maior que dois.

Palavras-chave. Aplicações estáveis, conjunto singular, contorno aparente, grafos, superfícies.

1 Introdução

As singularidades das aplicações estáveis entre superfícies, segundo Whitney [10], só podem ter curvas do tipo dobra com pontos de cúspide isolados. A descrição de uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas, a determinação do tipo topológico de seu conjunto regular, no domínio, e o tipo de isotopia do contorno aparente (imagem do conjunto singular) são informações topológicas do domínio da aplicação que podem ser codificadas em um grafo com pesos nos vértices ([3, 4, 7]), onde as curvas singulares que separam as regiões regulares correspondem às arestas do grafo. O estudo dos grafos associados às aplicações estáveis entre superfícies fechadas teve início em [4], para o caso de aplicações de superfícies fechadas e orientadas na esfera e em [7] foi estendido para o caso geral de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas. Posteriormente, em [5], passando para o caso de superfícies não orientadas, tratando especificamente das aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo, foi necessário associar pares de pesos nos vértices do grafo, permitindo distinguir as regiões regulares orientadas e as não orientadas. Desta forma, o grafo com pares de pesos nos vértices carrega as informações topológicas, do ponto de vista global, das curvas singulares e do conjunto regular da aplicação a ele associada. As técnicas aplicadas para provar os resultados sobre grafos de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas são as transições de codimensão um, introduzidas em [9] e as cirurgias de aplicações estáveis, introduzidas [3]. As transições ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves, permitem alterar os conjuntos regulares e singulares das aplicações, conseqüentemente alterando o grafo da aplicação. As cirurgias permitem construir novas aplicações a partir de aplicações já conhecidas.

Em trabalhos mais recentes, sobre aplicações no plano projetivo [6], foi dada atenção ao caso particular de aplicações dobras planares. Os resultados obtidos mostraram que é necessário um certo balanceamento entre os números de vértices e seus pesos. Aqui não pretendemos tratar as aplicações dobras.

Nosso objetivo, neste artigo, é estender os resultados (obtidos para aplicações no plano projetivo) para o caso geral de aplicações entre duas superfícies fechadas (incluindo as não orientadas), tendo como principal resultado o Teorema 5.1. Uma prova sucinta desse resultado está baseado em resultados [2, 7], para aplicações entre superfícies fechadas e orientadas e resultados de [5], para aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo.

¹cmendesjesus@ufjf.br

2 Aplicações estáveis entre superfícies

Sejam M e N duas superfícies e $C^\infty(M, N)$ o espaço de todas aplicações suaves da superfície M em N (com a C^∞ -topologia de Whitney [1]). Uma região sobre a superfície fechada N será dita simplesmente conexa, e será denotada por \mathcal{D}_N , se é homeomorfa a um disco.

Definição 2.1. Duas aplicações suaves $f, h : M \rightarrow N$ são homotópicas em $C^\infty(M, N)$ se existe uma aplicação $H : M \times I \rightarrow N$ contínua, tal que $H(x, 0) = h(x)$ e $H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in M$.

Definição 2.2. O conjunto das curvas singulares de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ será denotado por Σf e o conjunto $f(\Sigma f)$, imagem do conjunto singular, chamada de contorno aparente ou conjunto de ramificação e será denotado por B_f .

Definição 2.3. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre as superfícies fechadas M e N .

- f será dita aplicação planar se é homotópica a alguma aplicação $h : M \rightarrow N$, tal que $h(M) \subset \mathcal{D}_N$.
- B_f será dito contorno aparente planar se existe alguma aplicação estável $h : M \rightarrow N$, tal que $B_h \subset \mathcal{D}_N$ e as aplicações f e h são estavelmente isotópicas.

Definição 2.4. Duas aplicações $f, g \in C^\infty(M, N)$ são \mathcal{A} -equivalentes quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ e $\psi : N \rightarrow N$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita estável, se qualquer aplicação suficientemente próxima de f é \mathcal{A} -equivalente a f .

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, segundo Whitney [10], cada ponto $p \in M$ tem coordenadas locais do tipo: regular ($p = (x, y) \mapsto (x, y)$); ponto de dobra ($(x, y) \mapsto (x^2, y)$) ou ponto de cúspide ($(x, y) \mapsto (xy - x^3, y)$). Os pontos singulares formam curvas disjuntas sobre M . A Figura 1) ilustra três aplicações estáveis do toro no plano. Observe que as aplicações em (a) e (b) são equivalentes e (a) e (c) não são equivalentes.

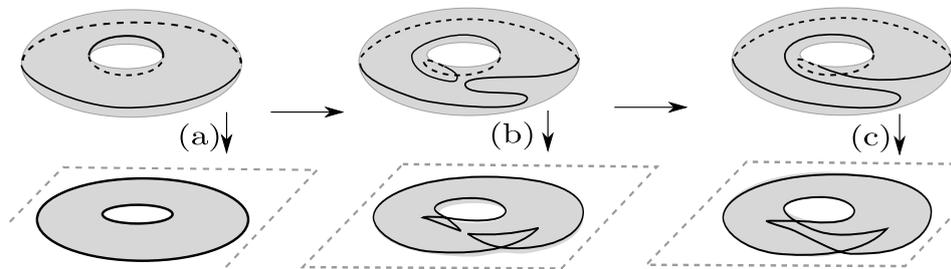


Figura 1: Exemplo de aplicações estáveis do toro .

Se M é uma superfície fechada, as curvas singulares de uma aplicação estável f são fechadas, simples e disjuntas e divide o conjunto regular, $M \setminus \Sigma f$, em um número finito de regiões conexas. As regiões regulares são imersas por f em N e tem como bordos as curvas de Σf .

Definição 2.1. Duas aplicações $f, h : M \rightarrow N$ são ditas estavelmente isotópicas se existe uma aplicação suave $F : M \times I \rightarrow N$ tal que para cada $t \in I$ a aplicação $F_t = F|_{M \times t}$ é estável, com $F_0 = f$ e $F_1 = h$.

Observação 2.1. Se f e h são duas aplicações estavelmente isotópicas, então elas estão na mesma componente do conjunto das aplicações estáveis. Logo os conjuntos singulares Σf e Σh são difeomorfos em M e os contornos aparentes B_f e B_h são difeomorfos em N .

3 Grafos associado às aplicações estáveis

Em [4, 7], foram associados grafos com pesos nos vértices às aplicações estáveis, entre superfícies fechadas e orientadas, da seguinte forma (ver Figura 2):

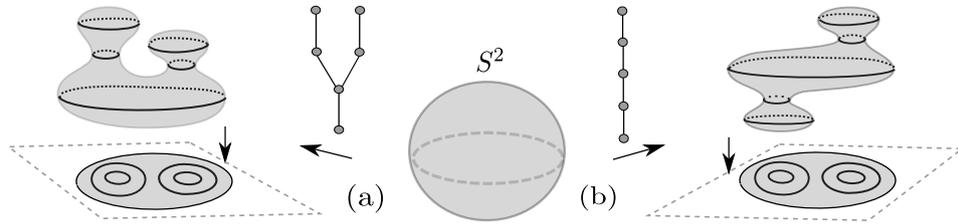


Figura 2: Exemplo de grafos de aplicações estáveis.

- cada região regular de $M \setminus \Sigma f$ corresponde a um vértice v do grafo;
- cada curva α de Σf corresponde a uma aresta a do grafo;
- uma aresta a conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular associada a v ;
- um vértice v recebe o peso $(t, 0)$ se a região regular correspondente a v é orientada e tem gênero t (soma de t toros) e v recebe o peso $(0, p)$ se a região regular correspondente a v é não orientada e tem gênero p (soma de p projetivos).
- uma aresta a no grafo, será dita \star -laço quando a vizinhança da curva α correspondente a a é uma faixa de Möbius. Neste caso, a aresta a recebe uma \star , como ilustra a Figura 3.

Definição 3.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre as superfícies fechadas M e N . Denotamos por V , E , $T + P$ e S , respectivamente, o número de vértices, o número de arestas, o peso total e o número de \star -laços do grafo associado a f . Este grafo é chamado de grafo dual de f e denotado por $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$.*

Proposição 3.1. [5] *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável e $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ o seu grafo dual. Então a característica de Euler de M é dado por*

- $\chi(M) = 2(V - E - T) - S$ e o gênero é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$, quando M é orientada. Nesse caso, $P = S = 0$.
- $\chi(M) = 2(V - E - T) + P - S$ e o gênero é dado por $g(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S$, quando M é não orientada.

Teorema 3.1. [7] *Todo grafo bipartido com $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ é grafo de alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies fechadas e orientadas. Além disso, o gênero de M é dado por $1 - V + E + T$.*

Teorema 3.2. [5] *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ está associado a alguma aplicação estável de uma superfície fechada M no plano projetivo. A superfície M é orientada, se e somente se, o grafo é bipartido com P . Além disso, o gênero de M é dado por $1 - V + E + T$ se M é orientada. Caso contrário o gênero de M é dado por $2(1 - V + E + T) + P - S$.*

4 Exemplos de grafos de aplicações estáveis

O grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é um invariante global que classifica a topologia do domínio de f , como pode observar na Figura 2. As duas aplicações planares da esfera com cinco curvas singulares tem o mesmo contorno aparente, mas os conjuntos singulares não são difeomorfos sobre a 2-esfera. Note que os grafos conseguem separar este tipos de aplicações com contorno aparente iguais.

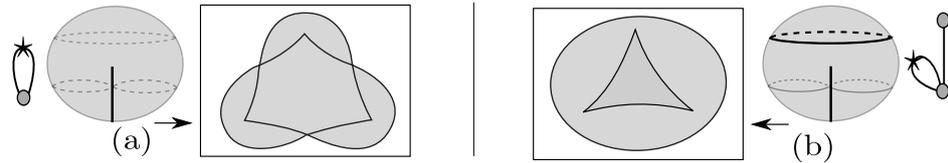


Figura 3: Exemplo de grafos de aplicações planares do plano projetivo.

Exemplo 4.1. A Figura 3 ilustra duas aplicações planares com contorno aparente planar, do plano projetivo em N . O grafo dual em (a) tem único vértice e a única aresta é um \star -laço, correspondente a única curva singular, que tem como vizinhança a faixa de Möbius. Em (b) o grafo tem duas arestas e uma delas é um \star -laço e a outra arestas corresponde a curva singular que separa as duas regiões regulares.

Exemplo 4.2. A Figura 4 ilustra duas aplicações na garrafa de Klein. Em (a) a única curva singular da aplicação não planar separa o 4-projetivo (superfície homeomorfa a soma do toro com a garrafa de Klein) em duas regiões, sendo uma região orientada com gênero um (toro com um buraco) e a outra região não orientada com gênero dois (garrafa de Klein com buraco). Em (b) a aplicação planar do toro tem duas curvas singulares, sendo que uma curva separa o "cilindro" do "cilindro" do "toro". Observe que o complemento de $D_{\mathbb{P}}$ é uma faixa de Möbius.

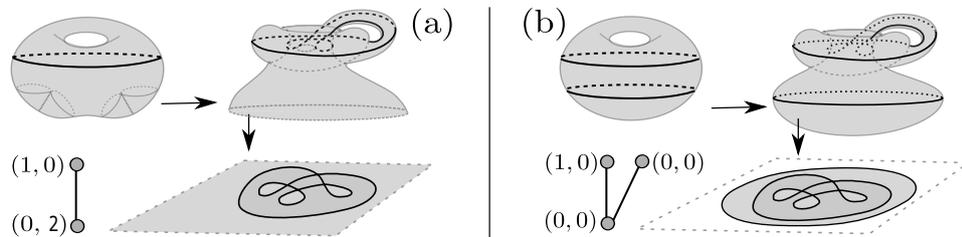


Figura 4: Exemplos de grafos de aplicações na garrafa de Klein.

Exemplo 4.3. A Figura 5 ilustra grafos associados de três contornos aparentes sobre o n -toro, de aplicações com grau zero e única curva singular: (a) aplicação planar do $(2r+s)$ -toro, o contorno aparente planar tem $2r + 1$ pontos duplos e $2s$ cúspides; (b) aplicação não planar do $(3n)$ -toro, o contorno aparente planar tem 4 pontos duplos; (c) aplicação não planar do $(4n + 6)$ -toro, o contorno aparente não planar tem seis pontos duplos.

Exemplo 4.4. A Figura 6 ilustra contornos aparentes de duas aplicações não planares no plano projetivo. Em (a) a aplicação do 14-projetivo (superfície homeomorfa a soma conexa do 6-toro com a garrafa de Klein) tem três curvas singulares e única região regular não orientada com

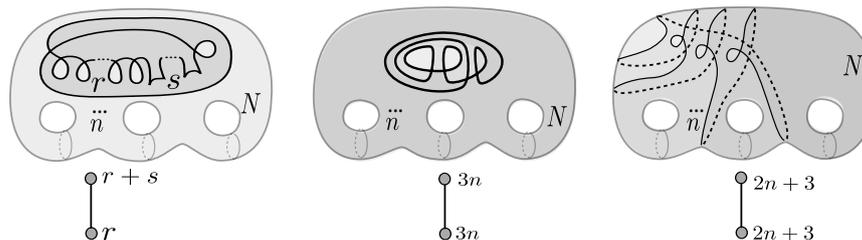


Figura 5: Exemplo de contornos aparentes no n-toro

gênero 9. Uma das curvas singulares tem como vizinhança uma faixa de Möebius e onze pontos de cúspides. Em (b), a aplicação do 15-projetivo (superfície homeomorfa a soma conexa dodo 7-toro com o plano projetivo) tem quatro curvas singulares que separam a superfície em duas regiões regulares com gênero 3, sendo uma orientada e outra não orientada.

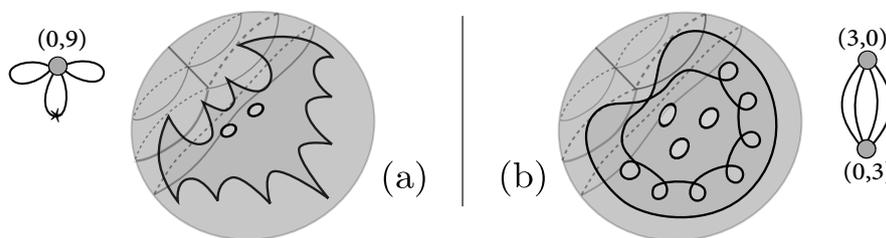


Figura 6: Exemplo de grafos de aplicações no plano projetivo.

5 Alguns resultados sobre grafos de aplicações estáveis

Denotamos por \mathbb{K}^2 a garrafa de Klein (soma conexa de dois planos projetivos) e por \mathbb{T}^2 a superfície toro. Denotamos por $t\mathbb{T}^2$ a superfície orientada, soma conexa de t toros ($t > 0$) com a 2-esfera \mathbb{S}^2 e por $p\mathbb{P}^2$ a superfície não orientada, soma conexa de p planos projetivos ($p > 0$).

Uma aplicação do toro no toro $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, pode ter grau d sem nenhum ponto singular. O próximo resultado foi provado em [7] para o caso de superfícies orientadas.

Proposição 5.1. *Se t, d, n são números inteiros positivos com $t = d(n - 1) + 1$, então o grafo $\mathcal{G}_{(t,0)}^S(1,0)$ pode ser associado a uma aplicação de recobrimento $f : t\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ com grau d .*

Em particular, $\mathcal{G}_{(t,0)}^S(1,0)$ é grafo da aplicação identidade $id : t\mathbb{T}^2 \rightarrow t\mathbb{T}^2$.

Proposição 5.2. *O grafo $\mathcal{G}_{(0,p)}^S(1,0)$ pode ser associado à aplicação $id : p\mathbb{P}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$.*

Consequentemente, $\mathcal{G}_{(0,2)}^S(1,0)$ é grafo da aplicação $id : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ e $\mathcal{G}_{(0,1)}^S(1,0)$ é grafo da aplicação $id : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Proposição 5.3. *O grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(1,0)$ pode ser associado a um recobrimento de duas folhas do T -toro no P -projetivo quando $P = T + 1$.*

Demonstração. Considere o 3-espço, com os eixos X, Y e Z . Seja M a imagem de uma imersão da superfície $T\mathbb{T}^2$ seguinte forma (ver Figura 7):

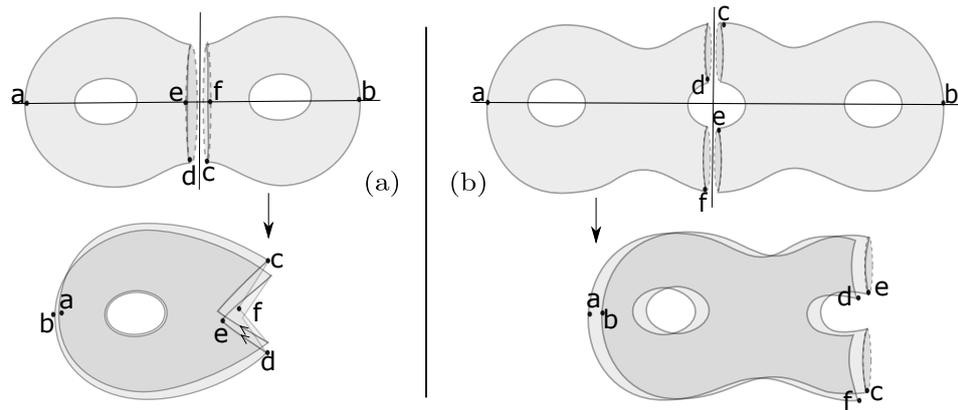


Figura 7: Capas do recobrimento de duas folhas de $3\mathbb{P}^2$ e $4\mathbb{P}^2$.

- i) M é simétrica em relação aos planos XY e YZ ;
- ii) o plano XY intersepta M em $T + 1$ curvas fechadas, sendo que as curvas dos T buracos de M estão centrados no eixo X ;
- iii) o plano YZ intersectando M em uma curva fechada quando t é par e em duas curvas fechadas para t ímpar, como ilustra a Figura 7.

Denotamos as duas componentes de $M \setminus (YZ \cap M)$ por M_1 e M_2 e por U uma vizinhança da curva $(YZ \cap M)$ da seguinte forma (ver [?]):

- (a) T par, $(YZ \cap M)$ tem uma componente de curva e U é uma região homeomorfa ao cilindro. Neste caso, a aplicação antípoda leva M_1 sobre M_2 e U é levado sobre uma faixa de Möbius (plano projetivo menos um disco). Então a imagem dessa aplicação é uma superfície não orientada com gênero $P = 2(\frac{T}{2}) + 1 = T + 1$.
- (b) T ímpar, $(YZ \cap M)$ tem duas componente de curva e U é uma região homeomorfa ao toro "menos dois discos". Neste caso, a aplicação antípoda leva M_1 sobre M_2 e U é levado sobre a garrafa de Klein "menos um disco". Então a imagem dessa aplicação é uma superfície não orientada com gênero $P = 2(\frac{T-1}{2}) + 2 = T + 1$.

Logo, o T -toro é um recobrimento de duas folhas do P -projetivo quando $P = T + 1$. □

Teorema 5.1. [5] *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é grafo de alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, onde as superfícies M e N são fechadas e o gênero de M é dado por $1 - V + E + T$ se M é orientada, caso contrário o gênero de M é dado por $2(1 - V + E + T) + P - S$.*

Demonstração. O grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, sendo que se $P > 0$ a superfície M é não orientada com gênero $2(1 - V + E + T) + P - S$ e N pode ser qualquer superfície não orientada (veja o Teorema 3.2 para $N = \mathbb{P}$). Se $p = 0$ e o grafo é bipartido, então pelo Teorema 3.1 o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, onde M é uma superfície orientada com gênero $1 - V + E + T$. No caso em que $P = 0$ e o grafo é não bipartido, então f tem grau diferente de zero se N é uma superfície orientada. □

Corolário 5.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre as superfícies fechadas M e N .*

- 1. *Se N é uma superfície orientada, então o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é bipartido se, e somente se, M é uma superfície orientada.*

2. Se N é uma superfície orientada e o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é bipartido, então $P = S = 0$.
3. Se N é uma superfície orientada e M é uma superfície não orientada, então o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é não bipartido e $P = 0$.
4. Se o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ é bipartido e M é uma superfície não orientada, então $P > 0$.
5. Se N é o plano projetivo e M é orientada, então f é uma aplicação planar.

6 Considerações Finais

Dada uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas, a definição já garante a existência do seu grafo dual. Mostrar que existe uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas associada a um dado grafo, com N fixado, não é trivial. Isto equivale a determinar uma aplicação que tem como conjunto singular um dado conjunto de curvas sobre a superfície. Conhecer aplicações menores, manipular bem as cirurgias de aplicações estáveis e as transições no espaço de funções ajudar na determinação de aplicações com o conjuntos singulares pré-determinados. Para trabalhos futuros, exibir um algoritmo para a construção das aplicações para um dado grafo e também determinar aplicações sem pontos de cúspides.

Referências

- [1] M. Golubitsky e V. Guillemin. **Stable mappings and their singularities**, Vol.14. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] D. Hacon, Mendes de Jesus. C. e M. C. Romero Fuster. “Fold maps from the sphere to the plane”. **Experimental Maths** 15 (2006), pp. 491–497. DOI: 10.1080/10586458.2006.10128973.
- [3] D. Hacon, Mendes de Jesus. C. e M. C. Romero Fuster. “Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data”. **Topology and Its Appl.**, 154 (2007), pp. 166–175. DOI: 10.1016/j.topol.2006.04.005.
- [4] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere”. **Journal of Singularities** 2 (2010), pp. 67–80. DOI: 10.5427/jsing.2010.2e.
- [5] C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane”. **Topology and its Applications**. 234 (2017), pp. 298–310. DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.013.
- [6] C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Graphs associated to fold maps from closed surfaces to the projective plane”. **Homology, Homotopy and Applications**, (2022), Aceito.
- [7] C. Mendes de Jesus. “Graphs of stable maps between closed orientable surfaces”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 36.3 (2017), pp. 1185–1194. DOI: 10.1007/s40314-016-0317-9.
- [8] C. Mendes de Jesus e Pantaleón D. Romero. “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for regular polygons”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, New Series 51.2 (2020), pp. 527–541. DOI: 10.1016/j.tcs.2007.10.018.
- [9] T. Ohmoto e F. Aicardi. “First order local invariants of apparent contours”. Em: **Topology**, 45.1 (2006), pp. 27–45. DOI: 10.1016/j.top.2005.04.005.
- [10] H. Whitney. “On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane”. Em: **Annals of Mathematics** (1955), pp. 374–410. DOI: 10.2307/1970070.