

# Emparelhamento de arestas e aplicações estáveis

Catarina Mendes de Jesus Sanchez<sup>1</sup>

DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

Gheyza Ferreira da Silva<sup>2</sup>

DEMAT/UFESJ, São João Del Rei, MG

Jane Lage Bretas<sup>3</sup>

DM/CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

**Resumo.** Este trabalho tem como objetivo associar grafo de emparelhamento de arestas de polígonos regulares ao contorno aparente de uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas. Este grafo determina uma condição necessária para identificar contornos aparentes de aplicações planares.

**Palavras-chave.** Aplicações estáveis, aplicações planares, emparelhamento de arestas, grafos, superfícies fechadas.

## 1 Introdução

A Teoria dos Grafos estuda as relações existentes entre diversos elementos que necessitam de uma organização e compreensão dos dados. Essa estrutura matemática abstrata representa graficamente as relações existentes entre os elementos descritos em um espaço euclidiano com um conjunto de vértices e arestas. Desde que Leonhard Euler associou grafo ao famoso problema das sete pontes da cidade de Königsberg, a Teoria dos Grafos vem ganhando mais espaço, principalmente com o desenvolvimento da Ciência da Computação. Estas aplicações são importantes, não só apenas no ramo da matemática, mas também em diversas outras áreas profissionais.

No estudo global das aplicações estáveis ([3, 8]) entre superfícies, em [4, 6], foi provado que qualquer grafo bipartido pode ser associado a uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas. Em [2], os autores estudaram outros tipos de grafos, os que são associados aos emparelhamentos de arestas de polígonos regulares. Para obter novos grafos de emparelhamentos de arestas, foram introduzidas cirurgias de emparelhamentos em [1, 5]. Em [7], foram introduzidas a extensão e a contração de grafos sobre uma superfície que também permite obter novos grafos de emparelhamento, partindo do grafo de emparelhamento com único vértice. A combinação da cirurgia, extensão de grafos e a troca de arestas, introduzida em [5], contribui e muito para determinar novos grafos de emparelhamento de arestas. Fica uma pergunta: estas técnicas são suficientes para determinar todos os possíveis grafos de emparelhamento associado a uma superfície com gênero  $g$  fixo?

Neste trabalho, associamos um grafo de emparelhamento de arestas de um polígono regular sobre uma superfície fechada e orientada  $N$  ao contorno aparente de uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada  $M$ , com o objetivo de determinar se uma aplicação de grau zero é uma aplicação planar. Para isso, definimos um grafo par e mostramos, no Teorema 5.1, que uma condição necessária para que uma aplicação estável  $f : M \rightarrow N$  seja planar é que o número de interseção de um grafo de emparelhamento par e o contorno aparente de  $f$  deve ser par.

---

<sup>1</sup>cmendesjesus@ufjf.br

<sup>2</sup>gheyza@ufs.edu.br

<sup>3</sup>janebretas@cefetmg.br

## 2 Emparelhamento de arestas de polígonos regulares

Ao longo deste trabalho, vamos considerar grafos conexos e superfícies fechadas e orientadas.

**Definição 2.1.** *Seja  $G$  um grafo com  $V_G$  vértices e  $A$  arestas. O **gênero** do grafo  $G$  é o menor número  $n$  para o qual existe uma superfície fechada e orientada  $N$  com gênero  $n$  e um mergulho  $\iota : G \rightarrow N$ .*

*A característica de  $G$  é dada por  $\chi(G) = V_G - A$ .*

Sejam  $N$  uma superfície fechada e orientada com gênero  $n$  e  $\iota : G \rightarrow N$  um mergulho. Denotamos por  $\mathbb{G}$  o grafo que representa a classe de todos os grafos sobre  $N$  difeomorfos a  $\iota(G)$ , cujo complemento também é homeomorfo a  $N \setminus \iota(G)$ . Denotamos por  $F_\iota$  o número de componentes conexas do complemento  $N \setminus \mathbb{G}$ . O número  $F_\iota$  depende do mergulho  $\iota$  e é sempre menor que o número de ciclos do grafo, isto é,  $F_\iota \leq 1 - V_G + A$ .

**Observação 2.1.** *Se todas as  $F_\iota$  componentes de  $N \setminus \mathbb{G}$  são regiões simplesmente conexas, então a característica de Euler de  $N$  pode ser dada por  $\chi(N) = \chi(G) + F_\iota$ .*

**Definição 2.2.** *O **grau** de um vértice  $v$  do grafo  $G$ , denotado por  $\text{deg}(v)$ , é o número de arestas do grafo incidentes a  $v$ , sendo que o laço conta duas vezes no grau do vértices no qual é incidente.*

*O grafo  $G$  é dito **grafo par** se todos os seus vértices tem grau par.*

**Definição 2.3.** *Seja  $v$  um vértice do grafo  $\mathbb{G}$  (sobre  $N$ ). Uma aresta  $uw \in \mathbb{G}_1$  é dita uma **extensão** de  $v$  sobre  $N$ , quando os vértices  $u, w \in \mathbb{G}$  e a aresta  $uw$  podem ser obtidos por um “estiramento” do vértice  $v$ . Nesse caso, dizemos que o grafo  $\mathbb{G}_1$  é uma **extensão do grafo**  $\mathbb{G}$  sobre  $N$ , ou que  $\mathbb{G}$  é uma **contração** de  $\mathbb{G}_1$  sobre  $N$  (ver Figura 1).*

*A extensão de  $\mathbb{G}$  será dito **par** se pelo menos um dos vértices  $u$  e  $w$  de  $\mathbb{G}_1$  tem grau par.*

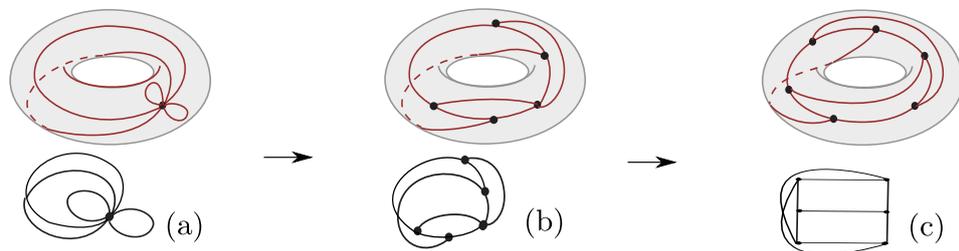


Figura 1: Exemplos de extensões de grafos sobre o toro.

Em [7], foi mostrado que o número de ciclos de um grafo  $\mathbb{G}$  e o número de componentes conexas do complemento  $M \setminus \mathbb{G}$  são invariantes em relação a extensão e a contração de grafos (sobre  $N$ ), como ilustra a Figura 1.

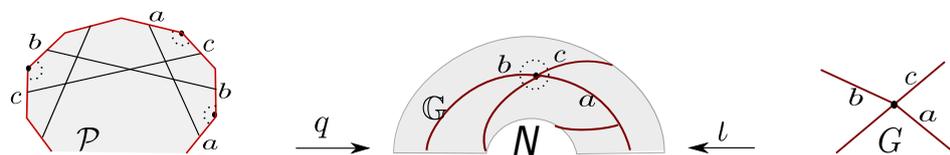


Figura 2: Exemplos de extensões de grafos sobre o toro.

**Definição 2.4.** *Um **emparelhamento de arestas** de um polígono regular  $\mathcal{P}$ , com  $2A$  lados, sobre a superfície  $N$  é uma aplicação quociente  $q : \mathcal{P} \rightarrow N$  que leva pares de arestas do bordo de*

$\mathcal{P}$ , sobre um arco de curva em  $N$ , correspondente a uma aresta do grafo, e leva  $k$  vértices de  $\mathcal{P}$  ( $k \geq 2$ ) sobre um ponto de  $N$ , correspondente a um vértice do grafo (ver Figura 2).

Um grafo  $\mathbb{G}$  é dito **grafo do emparelhamento de arestas** se coincide com a imagem do bordo de  $\mathcal{P}$ , para algum emparelhamento de arestas  $q : \mathcal{P} \rightarrow N$ .

Note que o emparelhamento  $q : \mathcal{P} \rightarrow N$  é uma aplicação injetora no interior do polígono  $\mathcal{P}$ . A Figura 3 ilustra dois emparelhamentos do polígono com 10 arestas sobre o bitoro. O grafo tem  $V_G = 2$  e  $A = 5$ . Todos os vértices tem grau 5. Os seguimentos de retas nos polígonos indicam os pares de arestas que são identificados no emparelhamento.

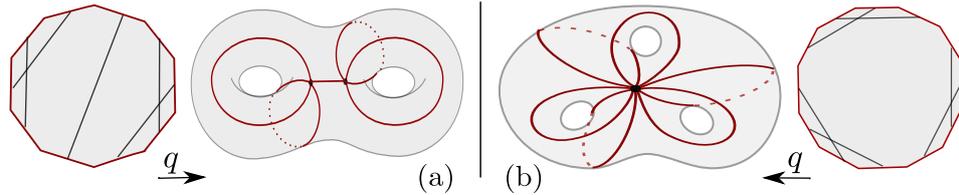


Figura 3: Exemplos de extensões de grafos sobre o toro.

**Proposição 2.1.** [7] Se  $\mathbb{G}$  é um grafo de emparelhamentos de arestas sobre a superfície  $N$ , então  $\chi(G) = 1 - 2n$ .

### 3 Grafos e curvas sobre superfícies

Seja  $B$  uma curva fechada sobre  $N$ , imagem de uma aplicação do círculo  $\mathbb{S}^1$  sobre  $N$ , podendo ter pontos duplos e pontos de cúspides isolados.

**Definição 3.1.** Uma curva fechada  $B$  sobre  $N$  é dita **estável** se todas as suas auto-interseções são transversais. Ou seja,  $B$  não tem pontos de tangências ou outras singularidades além de possíveis pontos duplos e pontos de cúspides isoladas.

**Definição 3.2.** As aplicações suaves  $f, h : \mathbb{S}^1 \rightarrow N$  são homotópicas se existe uma aplicação  $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow N$  contínua, tal que  $H(x, 0) = h(x)$  e  $H(x, 1) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

**Definição 3.3.** Um grafo  $\mathbb{G}$  será dito **transversal** a uma curva  $B$  sobre  $N$  se o conjunto  $\mathbb{G} \cap B$  é vazio ou se  $p \in \mathbb{G} \cap B$  então  $p$  não é vértice de  $\mathbb{G}$  e nem um ponto duplo ou cúspide de  $B$ , além disso a interseção entre  $B$  e  $\mathbb{G}$  em  $p$  ocorre de forma transversal (ver Figura 4).

O número de pontos na interseção entre  $B$  e  $\mathbb{G}$  será denotado por  $\#\{\mathbb{G} \cap B\}$

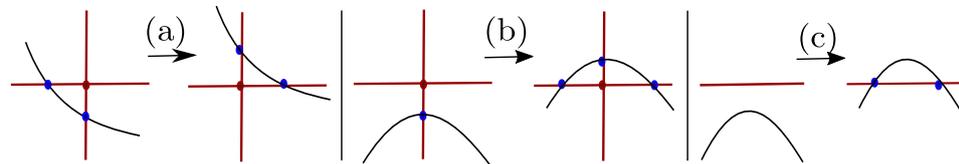


Figura 4: Transições: (a) e (b) entre curva e vértice com grau 4, (c) entre curva e aresta.

**Lema 3.1.** Seja  $v$  um vértice do grafo  $\mathbb{G}$  transversal a uma curva estável  $B$  sobre  $N$ . Se  $B_1$  é a curva homotópica a  $B$  obtida pela transição de arco  $\alpha$  de  $B$  pelo vértice  $v$ , então  $\#\{\mathbb{G} \cap B\}$  e  $\#\{\mathbb{G} \cap B_1\}$  tem a mesma paridade.

*Demonstração.* Suponha que o vértice  $v$  tenha grau  $2k$ , em que  $k > 1$  (ver Figura 4). Se o arco  $\alpha$  intercepta  $r$  arestas de  $v$ , então depois de passar por  $v$ , o arco passa a interceptar as  $2k - r$  arestas restantes de  $v$ . Logo, ambos os números  $r$  e  $2k - r$  são pares ou ímpares.  $\square$

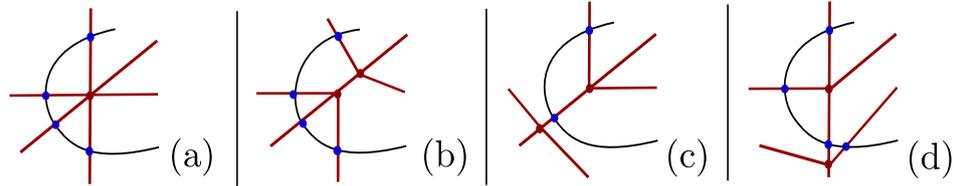


Figura 5: Exemplos de extensões pares de um vértice de grau 6.

**Proposição 3.1.** *Sejam  $B$  uma curva estável sobre  $N$  e  $\mathbb{G}_1$  um grafo transversal a  $B$  obtido pela extensão par do grafo  $\mathbb{G}$ , também transversal a  $B$ . Então  $\#\{\mathbb{G} \cap B\}$  e  $\#\{\mathbb{G}_1 \cap B\}$  tem a mesma paridade.*

*Demonstração.* Seja  $v \in \mathbb{G}$  um vértice de grau  $K$  e  $uw$  a aresta de  $\mathbb{G}_1$  obtida pela extensão par do vértice  $v$ . Se  $u$  tem grau  $2s$ , então  $w$  tem grau  $k - 2s + 2$  e pode ocorrer um dos dois casos:

- i)  $uw \cap B = \emptyset$ , nesse caso,  $\#\{\mathbb{G} \cap B\} = \#\{\mathbb{G}_1 \cap B\}$  (ver Figura 5 (b)).
- ii)  $uw \cap B \neq \emptyset$ , neste caso,  $\#\{\mathbb{G} \cap B\} = \#\{\mathbb{G}_1 \cap B\} \pm 2s$ , para algum inteiro  $s > 0$  (ver Figura 5 (c) e (d)), pois se na extensão digamos que o vértice  $u$  passa por um arco  $\alpha$  de  $B$ , como  $u$  tem grau par, pelo Lema 3.1, a paridade da interseção é mantida.

Nos dois casos, a paridade do número de interseção entre o grafo e  $B_f$  é mantida.  $\square$

## 4 Aplicações estáveis entre superfícies

Sejam  $M$  e  $N$  superfícies suaves. Denotamos por  $C^\infty(M, N)$  o espaço de todas as aplicações de classe  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$  (com a  $C^\infty$ -topologia de Whitney [3]).

**Definição 4.1.** *Duas aplicações  $f, g \in C^\infty(M, N)$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes quando existem difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow M$  e  $\psi : N \rightarrow N$  tais que  $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ .*

*Uma aplicação  $f \in C^\infty(M, N)$  é dita **estável**, se qualquer aplicação suficientemente próxima de  $f$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f$ .*

Segundo Whitney [9], se  $f$  é uma aplicação estável, então, localmente em cada ponto  $p \in M$ , existem coordenadas locais  $(x, y)$  tais que  $f$  é dada por uma das seguintes formas:  $(x, y) \mapsto (x, y)$  ( $p$  é **ponto regular**) ou  $(x, y) \mapsto (x^2, y)$  ( $p$  é **ponto de dobra**) ou  $(x, y) \mapsto (xy - x^3, y)$  ( $p$  é **ponto de cúspide**).

**Definição 4.2.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável.*

1. O **conjunto singular** de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow N$ , será denotado por  $\Sigma f$  e está formado por um conjunto de curvas, simples e disjuntas sobre  $M$ .
2. O conjunto  $B_f = f(\Sigma f)$ , imagem do conjunto singular, é chamada de **contorno aparente** ou **conjunto de ramificação** de  $f$  e está formado por curvas estáveis com pontos de cúspides isolados.

Uma região conexa  $M_i$  de  $M \setminus \Sigma f$  é dita *positiva* se  $f$  preserva a sua orientação. Caso contrário,  $M_i$  é dita *negativa*. Dado um ponto  $q$ , valor regular de  $f: M \rightarrow N$ , atribuímos sinais de  $\pm 1$  para cada ponto de sua pré-imagem, composta por um número finito de pontos  $\{x_1, \dots, x_n\} = f^{-1}(q)$ , de acordo com o sinal positivo/negativo da região conexa regular de  $M$  em que se encontra. Com isto, podemos definir o grau local de  $f$  em  $q$  como segue:

**Definição 4.3.** *Sejam  $M$  e  $N$  superfícies fechadas e orientadas e  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação estável. O grau local de  $f$  em  $p \in N$ , denotado por  $\deg_p f$ , é a soma dos sinais atribuídos a cada ponto de  $f^{-1}(p)$  sobre  $M$ .*

O grau de  $f$ , denotado por  $\deg f$ , é o valor de  $\deg_p f$ , constante para cada ponto  $p \in N$  (valor regular de  $f$ ).

**Observação 4.1.** *O grau de uma aplicação estável  $f: M \rightarrow N$  é um invariante homotópico, ou seja, se  $f$  e  $g$  são aplicações homotópicas, então  $\deg f = \deg g$ . Além disso, se  $f$  é a aplicação identidade, então  $\deg f = 1$ .*

Se  $M$  é uma superfície fechada e orientada, então  $\Sigma f$  está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas sobre  $M$ . O conjunto regular  $M \setminus \Sigma f$ , está formado por um número finito de regiões conexas, que são imersas em  $N$  por  $f$ . Em [4, 6], foram associados grafos com pesos nos vértices às aplicações estáveis, entre superfícies fechadas e orientadas, da seguinte forma (ver Figura 6): cada região regular de  $M \setminus \Sigma f$  corresponde a um vértice  $v$  do grafo; cada curva  $\alpha$  de  $\Sigma f$  corresponde a uma aresta  $a$  do grafo; uma aresta  $a$  conecta o vértice  $v$  se, e somente se, a curva singular correspondente a  $a$  está no bordo da região regular correspondente a  $v$ ; um vértice  $v$  recebe o peso  $w$  se a região regular correspondente a  $v$  tem gênero  $w$  (soma de  $w$  toros).

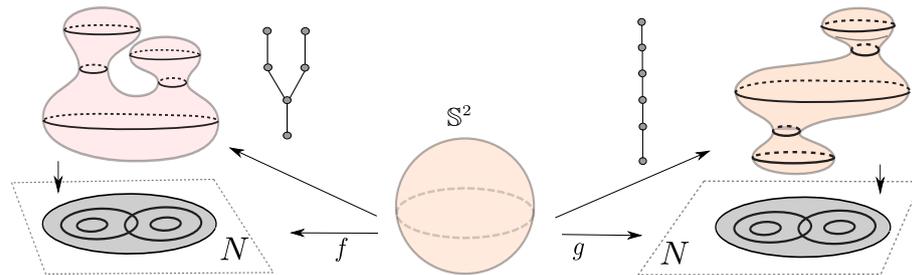


Figura 6: Exemplo de grafos de aplicações estáveis da 2-esfera sobre  $N$ .

**Definição 4.4.** *O grafo  $\mathcal{G}(V, E, W)$  associado a aplicação estável  $f: M \rightarrow N$  é chamado de grafo dual de  $f$ , onde  $V$ ,  $E$  e  $W$  denotam, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o peso total do grafo.*

**Proposição 4.1.** [6] *Se  $\mathcal{G}(V, E, W)$  é o grafo dual da aplicação estável  $f: M \rightarrow N$ , então a superfície fechada e orientada  $M$  tem característica de Euler dada por  $\chi(M) = 2(V - E - W)$  e o gênero dado por  $g(M) = 1 - V + E + W$ .*

O grafo  $\mathcal{G}(V, E, W)$  é um invariante topológico da aplicação estável  $f: M \rightarrow N$ , que classifica por completo a topologia do par  $(M, \Sigma f)$  e têm contribuído para diferenciar aplicações estáveis com conjunto singulares não difeomorfos em  $M$ , mas que têm contornos aparentes iguais sobre  $N$ , como ilustra a duas aplicações da 2-esfera na Figura 6.

## 5 Aplicações planares sobre superfícies fechadas

Uma região sobre  $N$  é dita simplesmente conexa se é homeomorfa a um disco. Denotamos por  $\mathcal{D}_N$  uma região simplesmente conexa em  $N$ .

**Definição 5.1.** Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  é dita **aplicação planar** se  $f$  é homotópica a alguma aplicação  $h: M \rightarrow N$ , tal que  $h(M) \subset \mathcal{D}_N$ .

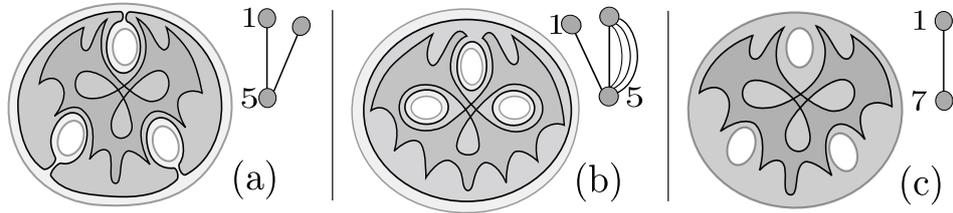


Figura 7: Aplicações no 3-toro: (a) planar; (b) não planar com grau zero; (c) com grau um.

Note que toda aplicação planar tem grau zero, pois o grau é invariante pela homotopia. A Figura 7 ilustra contornos aparentes sobre o 3-toro, com seus grafos associados, onde: (a) aplicação planar do 6-toro com duas curvas singulares; (b) aplicação não planar do 9-toro, com grau zero e cinco curvas singulares; (c) aplicação do 8-toro com grau um e única curva singular.

**Definição 5.2.** Uma aplicação estável  $f: M \rightarrow N$  possui **contorno aparente planar** se existe alguma aplicação estável  $h: M \rightarrow N$ , tal que  $B_h \subset \mathcal{D}_N$ , os conjuntos singulares  $\Sigma f$  e  $\Sigma h$  são difeomorfos em  $M$  e os contornos aparentes  $B_f$  e  $B_h$  são difeomorfos em  $N$ .

A Figura 7 ilustra contornos aparentes planares em (a) e (c) já em (b) o contorno aparente é não planar. Note que o contorno aparente planar não implica em uma aplicação planar e aplicações planares podem não ter contornos aparentes planares. Se  $f: M \rightarrow N$  é uma aplicação estável, lembramos que  $B_f$  é um conjunto de curvas estáveis com possíveis pontos duplos e pontos de cúspides isolados. Como consequência da Proposição 5.1, temos o seguinte resultado.

Lembrando que as curvas do contorno aparente  $B_f$ , de uma aplicação estável  $f: M \rightarrow N$ , são estáveis com possíveis pontos duplos e pontos de cúspides isolados. Como consequência da Proposição 5.1, temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.1.** Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação estável e  $\mathbb{G}$  um grafo de emparelhamento transversal a  $B_f$  (sobre  $N$ ). A extensão par de  $\mathbb{G}$  sobre  $N$  mantém a paridade do número de pontos na interseção entre os grafos de emparelhamento e o contorno aparente  $B_f$ .

A Figura 8 ilustra dois exemplos de grafos de emparelhamentos sobre o contorno aparente planar no 3-toro, dado na Figura 7(a). Em (a), o grafo par tem  $V_G = 1$  e  $A = 6$  e em (b) o grafo par tem  $V_G = 4$  e  $A = 9$  e pode ser obtido por uma extensão par do grafo em (a).

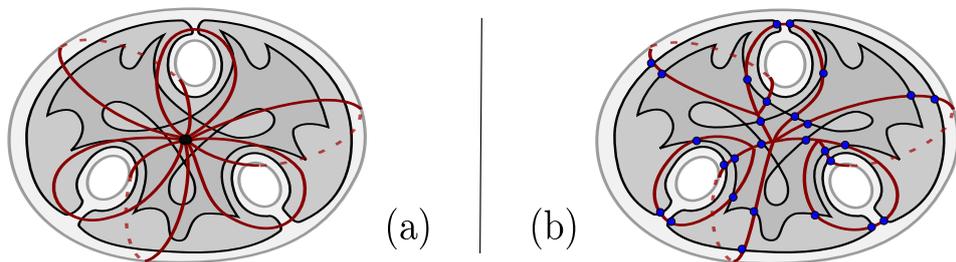


Figura 8: Exemplo de extensão de grafo de emparelhamento sobre o contorno aparente.

**Teorema 5.1.** Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação estável planar e  $\mathbb{G}$  um grafo de emparelhamento de arestas transversal a  $B_f$  sobre  $N$ . Se  $\mathbb{G}$  é um grafo par, então o número  $\#\{\mathbb{G} \cap B_f\}$  é par.

*Demonstração.* Por definição, se  $f$  é planar, então existe alguma aplicação estável  $h: M \rightarrow N$  homotópica a  $f$ , tal que  $B_h \subset \mathcal{D}_N$ , com  $\mathcal{D}_N \subset N \setminus \mathbb{G}$ . Seja  $H: M \times I \rightarrow N$ , em que  $I = [0, 1]$ , um caminho no espaço das funções suaves entre  $h$  e  $f$ , tal que  $H_0(x, 0) = h(x)$ ,  $H(x, 1) = f(x)$  e  $H_t = H(x, t)$ , para  $t \in I$ . Como  $\mathbb{G}$  é um grafo par, ao longo deste caminho, o número  $\#\{\mathbb{G} \cap B_{H_t}\}$  sempre altera por  $\pm 2$ , pela Lema 3.1. Como a alteração sempre se dá aos pares, até chegar em  $f$ , o total de pontos  $\#\{B_f \cap \mathbb{G}\}$  é par.  $\square$

**Observação 5.1.** *Uma condição necessária para que  $f$  seja uma aplicação planar é que o número de pontos na interseção  $B_f \cap \mathbb{G}$  seja par. Esta condição não é suficiente, pois  $f$  pode ter contorno aparente planar com  $\{B_f \cap \mathbb{G}\} = 0$  e não ser uma aplicação planar.*

## 6 Considerações Finais

Dada uma aplicação estável  $f$ , entre duas superfícies fechadas e orientadas  $M$  e  $N$ , o grau de  $f$  pode ser dado pelo grau de um ponto de  $p \in N$ . Se  $f(M)$  pode ser arrastado por homotopia, para dentro de uma região simplesmente conexa, então podemos afirmar que a aplicação é de grau zero e o Teorema 5.1 dá uma condição necessária para determinar se esta aplicação é planar. Buscar condições suficientes para que  $f$  seja uma aplicação planar, pode ser um trabalho futuro.

## Referências

- [1] M. B. Faria, C. Mendes de Jesus e P. D. R. Sanchez, “Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, New Series 47.4 (2016), pp. 1085–1095. DOI: 10.1007/s00574-016-0205-3.
- [2] M. B. Faria e R. Palazzo Jr. “Emparelhamentos generalizados associados a tesselação  $\{12g-36, \}$ ”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 11.1 (2010), pp. 59–67. DOI: 10.5540/tema.2010.011.01.0059.
- [3] M. Golubitsky e V. Guillemin. **Stable mappings and their singularities**, Vol.14. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. **Journal of Singularities** 2 (2010) pp. 67–80. DOI: 10.5427/jsing.2010.2e.
- [5] C. Mendes de Jesus. “Grafos associados aos emparelhamentos de arestas de polígonos regulares”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 23.2 (2022), pp. 335–347. DOI: 10.5540/tcam.2022.023.02.00335.
- [6] C. Mendes de Jesus. “Graphs of stable maps between closed orientable surfaces”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 36.3 (2017), pp. 1185–1194. DOI: 10.1007/s40314-016-0317-9.
- [7] C. Mendes de Jesus e Pantaleón D. Romero. “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for regular polygons”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, New Series 51.2 (2020), pp. 527–541. DOI: 10.1016/j.tcs.2007.10.018.
- [8] T. Ohmoto e F. Aicardi. First order local invariants of apparent contours. Em: **Topology** 45.1 (2006) pp. 27–45. DOI: 10.1016/j.top.2005.04.005.
- [9] H. Whitney. “On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane”. Em: **Annals of Mathematics** (1955) pp. 374–410. DOI: 10.2307/1970070.