

Tijolos de Euler e demais Cuboides Primitivos

Alessandro Firmiano de Jesus,¹ João Paulo M. dos Santos²

AFA, Pirassununga-SP

Juan López Linares³

FZEA/USP, Pirassununga-SP

Resumo. É comum que certas expressões da Teoria dos Números ainda resultem em problemas de interesse acadêmico ou pedagógico na comunidade matemática. Caso uma relação de números inteiros envolve objetos geométricos planos ou espaciais, a busca pela compreensão de suas características torna-se intensificada. Neste artigo, com o auxílio da programação Python, tipos especiais de prismas retangulares de dimensões inteiras são obtidos da formação de Trincas Pitagóricas. De abordagem diferenciada, a construção integrada de cada triângulo retângulo permitiu o estabelecimento de algumas propriedades geométricas e de outras conjecturas sobre o sólido gerado.

Palavras-chave. Teoria Algébrica dos Números, Trincas Pitagóricas, Construção de Cuboides.

1 Introdução

Cuboide (a, b, h) é o termo usado para representar o prisma retangular reto de parâmetros: largura a , comprimento b , altura h e diagonal maior d , todos por valores inteiros positivos. Ou seja, é um paralelepípedo de características especiais que vem sendo estudado desde os tempos de Leonardo Euler do século XVIII [5]. Outro sólido, o chamado **Tijolo de Euler**, é uma referência para o prisma retangular reto de parâmetros inteiros (a, b, h) cujas diagonais c , f e g das faces também são de medidas inteiras. Caso as dimensões deste tijolo são números primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(a, b, h) = 1$, então é definido um Tijolo de Euler Primitivo. Finalmente, o **Cuboide Perfeito** é o termo dado para o Tijolo de Euler que também possui a sua diagonal maior d de valor inteiro. Em termos algébricos, os parâmetros do Cuboide Perfeito (a, b, h) satisfaz o seguinte sistema de Equações Diofantinas:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 & (i) \\ a^2 + h^2 = f^2 & (ii) \\ b^2 + h^2 = g^2 & (iii) \\ a^2 + b^2 + h^2 = d^2 & (iv) \end{cases} \quad (1)$$

Nessa abordagem numérica, as dimensões do Tijolo de Euler satisfaz os itens (i) , (ii) e (iii) acima. As dimensões do Cuboide (a, b, h) satisfaz, no mínimo, a equação (iv) . No entanto, possíveis soluções do sistema diofantino (1), que fornecem as dimensões inteiras do Cuboide Perfeito, é ainda um problema em aberto na área da Teoria Algébrica dos Números [5]. Nos dias atuais, a busca desse intrigante sólido geométrico atrai tanto a atenção de matemáticos [4] quanto dos cientistas da computação [2].

¹firmianoafj@fab.mil.br

²jp2@alumni.usp.br

³jlopez@usp.br

1.1 Tijolos de Euler por Trincas Pitagóricas

O menor Tijolo de Euler Primitivo possui dimensões (44, 117, 240) e foi encontrado por Paul Halcke em 1719 [3]. Os valores das respectivas diagonais das faces são: $c = 125$, $f = 244$ e $g = 267$. Neste artigo, um código Python foi criado para determinar, entre todas as Trincas Pitagóricas de um dado cateto $a > 2$, os pares de trincas (a, b, c) e (a, h, f) que satisfazem os itens (i), (ii) e (iii) do sistema (1). A Figura 1 ilustra a parte principal desse *script* Python.

```

def gen_m1(n):
    mNumbers = []
    for m in range(n-1,0,-1):
        if (n**2-m**2)%m==0:
            mNumbers.append(m)
    return mNumbers

def gen_m2(n):
    mNumbers = []
    for m in range(n-1,-1,-1):
        if ((n-m)*(n+m+1))%(2*m+1)==0:
            mNumbers.append(m)
    return mNumbers

def Tijolo(a,B):
    aux=len(B); #Euler=[]
    if (aux>1):
        for i in range(0,aux-1):
            for j in range(i+1,aux):
                mdc=np.gcd.reduce([a,B[i],B[j]])
                if (mdc==1):
                    d2=B[i]**2+B[j]**2
                    d=math.pow(d2,.5)
                    if (int(d)**2==d2)and(a<B[i]): #d.is_integer():
                        h=int(a/mdc); x=int(B[i]/mdc); y=int(B[j]/mdc)
                        Euler.append([h,x,y])
    return Euler
    
```

Figura 1: Script Python para geração dos Tijolos de Euler Primitivo

Nessa Figura 1, as definições do topo são para a obtenção de todas as trincas pitagóricas $(a = 2n, b, c)$ e $(a = 2n + 1, b, c)$ [1]. O *script* inferior compara as trincas de cada grupo, duas a duas, para encontrar o par que satisfaz a equação (iii) e assim, determinar o Tijolo de Euler Primitivo $(a, b, h) \cdot \frac{1}{mdc(a,b,h)}$. Com esta estratégia, a tabela 1 organiza os 50 primeiros Tijolos de Euler Primitivos.

Tabela 1: 50 Tijolos de Euler Primitivos obtidos com pares de Trincas Pitagóricas

[44, 117, 240]	[85, 132, 720]	[140, 480, 693]	[160, 231, 792]	[187, 1020, 1584]
[195, 748, 6336]	[240, 252, 275]	[429, 880, 2340]	[495, 4888, 8160]	[528, 5796, 6325]
[780, 2475, 2992]	[828, 2035, 3120]	[832, 855, 2640]	[935, 17472, 25704]	[1008, 1100, 1155]
[1008, 1100, 12075]	[1080, 1881, 14560]	[1105, 9360, 35904]	[1155, 6300, 6688]	[1188, 16016, 39195]
[1560, 2295, 5984]	[1575, 1672, 9120]	[1755, 4576, 6732]	[2079, 44080, 65472]	[2163, 15840, 37100]
[2925, 3536, 11220]	[2964, 6160, 38475]	[2964, 9152, 9405]	[3696, 9045, 121940]	[4368, 4901, 13860]
[4599, 18368, 23760]	[4599, 23760, 144832]	[4900, 17157, 23760]	[4928, 10725, 30780]	[5320, 63063, 353760]
[5368, 163680, 450225]	[5491, 41580, 46512]	[5643, 14160, 21476]	[5643, 43680, 76076]	[5720, 8415, 157248]
[6072, 16929, 18560]	[6435, 24080, 24684]	[7336, 274527, 480480]	[7560, 13728, 35321]	[7579, 8820, 17472]
[7800, 23751, 29920]	[7840, 9828, 10725]	[7885, 16320, 85932]	[7920, 15232, 26649]	[8415, 157248, 643720]

Para exemplificar, o tijolo Halcke (44, 117, 240) foi obtido do conjunto $\{33, 117, 240, 483\}$ de catetos que compõem trinca pitagórica com $a = 44$. Neste conjunto, verifica-se que 117 e 240 determinam outra trinca pitagórica. Assim, a terna $(a = 44, b = 117, h = 240)$ de primos entre si satisfaz, com os inteiros $c = 125$, $f = 244$ e $g = 267$, os itens (i), (ii) e (iii) do sistema diofantino (1). Desta forma, (a, b, h) representa as dimensões de um Tijolo de Euler Primitivo determinado por três Trincas Pitagóricas. Os demais tijolos da Tabela 1 foram obtidos seguindo essa mesma estratégia de busca computacional com o *script* Python da Figura 1.

1.2 Cuboides por Trincas Pitagóricas

Para obter um Cuboide de parâmetros inteiros, considere que todo inteiro $a \geq 3$ é cateto menor em uma ou mais trincas pitagóricas (a, b, c) [1]. E ainda, se a medida do cateto a for um número ímpar, então é possível calcular a medida da hipotenusa $c = \frac{a^2 + 1}{2}$ para estabelecer a seguinte trinca pitagórica $(a, b = c - 1, c)$ sendo c uma outra medida ímpar. Pela mesma razão, c também será cateto menor na trinca $(c, h = d - 1, d)$ sendo o ímpar $d = \frac{c^2 + 1}{2}$. Desta maneira, fica estabelecida a seguinte relação entre esses inteiros positivos:

$$d^2 = c^2 + h^2 = a^2 + b^2 + h^2 \tag{2}$$

ou seja, d é a **diagonal espacial** do Cuboide (a, b, h) sendo $a > 1$ ímpar, $b = \frac{a^2 - 1}{2}$ e

$$h = d - 1 = \frac{a^4}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} \tag{3}$$

No caso em que $a > 2$ for um número par, considere $c = \frac{a^2 + 4}{4}$ para estabelecer a trinca pitagórica $(a, b = c - 2, c)$ [1]. Se $a = 2n$, com o parâmetro $n > 1$ outro número par, então c será ímpar e, conforme apresentado acima, c será cateto menor na trinca $(c, h = d - 1, d)$ sendo o ímpar $d = \frac{c^2 + 1}{2}$ satisfazendo a equação (2), no entanto, com

$$h = d - 1 = \frac{a^4}{32} + \frac{a^2}{4} \tag{4}$$

Se $a = 2n$, com o parâmetro $n > 1$ ímpar, então $c = \frac{a^2 + 4}{4}$ será par. Logo, c também será cateto menor na trinca pitagórica $(c, h = d - 2, d)$ sendo $d = \frac{c^2 + 4}{4}$ um número par que satisfaz a equação (2), no entanto, com

$$h = d - 2 = \frac{a^4}{64} + \frac{a^2}{8} - \frac{3}{4} \tag{5}$$

Neste último caso, os valores de a , $b = c - 2$ e $h = d - 2$ são todos números pares, ou seja, $\text{mdc}(a, b, h) > 1$.

A Tabela 2 organiza 100 cuboides (a, b, h) ordenados pelo valor do edge a e o respectivo valor de h definido por (3), (4) ou (5). Nesta tabela, apenas as duas primeiras linhas apresentam prismas retangulares degenerados. As demais linhas são de **Cuboides Primitivos** para todos os valores ímpares de a e para todos os valores pares de a que não são do tipo $2(2m + 1)$, $m \in \mathbf{Z}_+^*$. Uma pergunta natural é se existem cuboides primitivos associados ao edge de valor $a = 2(2m + 1)$, $m \in \mathbf{Z}_+^*$.

Tabela 2: Os 100 primeiros Cuboides (a, b, h) com diagonais inteiras $d = h + 1$ ou $d = h + 2$

Edge a	Edge b	Edge h	Diagonal d	mdc	Edge a	Edge b	Edge h	Diagonal d	mdc
1	0	0	1		51	1300	846300	846301	1
2	0	0	2		52	675	229164	229165	1
3	4	12	13	1	53	1404	987012	987013	1
4	3	12	13	1	54	728	133224	133226	2
5	12	84	85	1	55	1512	1144584	1144585	1
6	8	24	26	2	56	783	308112	308113	1
7	24	312	313	1	57	1624	1320312	1320313	1
8	15	144	145	1	58	840	177240	177242	2
9	40	840	841	1	59	1740	1515540	1515541	1
10	24	168	170	2	60	899	405900	405901	1
11	60	1860	1861	1	61	1860	1731660	1731661	1
12	35	684	685	1	62	960	231360	231362	2
13	84	3612	3613	1	63	1984	1970112	1970113	1
14	48	624	626	2	64	1023	525312	525313	1
15	112	6384	6385	1	65	2112	2232384	2232385	1
16	63	2112	2113	1	66	1088	297024	297026	2
17	144	10512	10513	1	67	2244	2520012	2520013	1
18	80	1680	1682	2	68	1155	669324	669325	1
19	180	16380	16381	1	69	2380	2834580	2834581	1
20	99	5100	5101	1	70	1224	375768	375770	2
21	220	24420	24421	1	71	2520	3177720	3177721	1
22	120	3720	3722	2	72	1295	841104	841105	1
23	264	35112	35113	1	73	2664	3551112	3551113	1
24	143	10512	10513	1	74	1368	469224	469226	2
25	312	48984	48985	1	75	2812	3956484	3956485	1
26	168	7224	7226	2	76	1443	1044012	1044013	1
27	364	66612	66613	1	77	2964	4395612	4395613	1
28	195	19404	19405	1	78	1520	579120	579122	2
29	420	88620	88621	1	79	3120	4870320	4870321	1
30	224	12768	12770	2	80	1599	1281600	1281601	1
31	480	115680	115681	1	81	3280	5382480	5382481	1
32	255	33024	33025	1	82	1680	707280	707282	2
33	544	148512	148513	1	83	3444	5934012	5934013	1
34	288	21024	21026	2	84	1763	1557612	1557613	1
35	612	187884	187885	1	85	3612	6526884	6526885	1
36	323	52812	52813	1	86	1848	855624	855626	2
37	684	234612	234613	1	87	3784	7163112	7163113	1
38	360	32760	32762	2	88	1935	1875984	1875985	1
39	760	289560	289561	1	89	3960	7844760	7844761	1
40	399	80400	80401	1	90	2024	1026168	1026170	2
41	840	353640	353641	1	91	4140	8573940	8573941	1
42	440	48840	48842	2	92	2115	2240844	2240845	1
43	924	427812	427813	1	93	4324	9352812	9352813	1
44	483	117612	117613	1	94	2208	1221024	1221026	2
45	1012	513084	513085	1	95	4512	10183584	10183585	1
46	528	70224	70226	2	96	2303	2656512	2656513	1
47	1104	610512	610513	1	97	4704	11068512	11068513	1
48	575	166464	166465	1	98	2400	1442400	1442402	2
49	1200	721200	721201	1	99	4900	12009900	12009901	1
50	624	97968	97970	2	100	2499	3127500	3127501	1

Ainda na Tabela 2, os valores de b associado ao edge $a = 4m$, $m \in \mathbf{Z}_+^*$ são ímpares, os demais valores são todos números pares. Uma vez que sempre é possível considerar $a = 4m = r + s$, sendo $r = 2m - 1$ e $s = 2m + 1$ dois números ímpares consecutivos, então, o respectivo edge $b = \frac{a^2 - 4}{4}$ satisfaz $b = r \cdot s$. Em particular, se os ímpares p e q são **Primos Gêmeos**, então o edge $a = p + q$ e o edge $b = p \cdot q$ pertencem ao mesmo cuboide.

Observando os cuboides organizados na Tabela 2, algumas conjecturas são estabelecidas:

- Para todo inteiro $a > 2$: $\frac{a^4}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3}{8}$, $\frac{a^4}{32} + \frac{a^2}{4}$ e $\frac{a^4}{64} + \frac{a^2}{8} - \frac{3}{4}$ são divisíveis por 12.
- Nesses cuboides (a, b, h) , o maior edge $h = 12n$, para algum $n \in \mathbf{Z}_+^*$, também está associado a um outro cuboide (\hat{a}, h, \hat{h}) . Para isto, observe que, se no primeiro cuboide a for um edge

ímpar, então, no segundo cuboide $\hat{a} = b + 1$. Caso o edge a for um número par, então $\hat{a} = b + 2$. Isto sugere a *não unicidade* do cuboide primitivo associado ao edge $h = 12n$.

- Não existe cuboide primitivo cuja diagonal espacial d seja um número par.
- No cuboide primitivo (a, b, h) apenas um dos edges é um número ímpar.
- Todo $a = 4m + 2, m \in \mathbf{Z}_+$ é edge em um determinado cuboide primitivo.
- Para todo $a \in \mathbf{Z}_+$ existem infinitos cuboides primitivos (a, b, h) .

No gráfico da Figura 2, a linha superior ilustra as coordenadas (a, d) , sendo d a diagonal espacial do cuboide (a, b, h) e em escala logarítmica do eixo vertical.

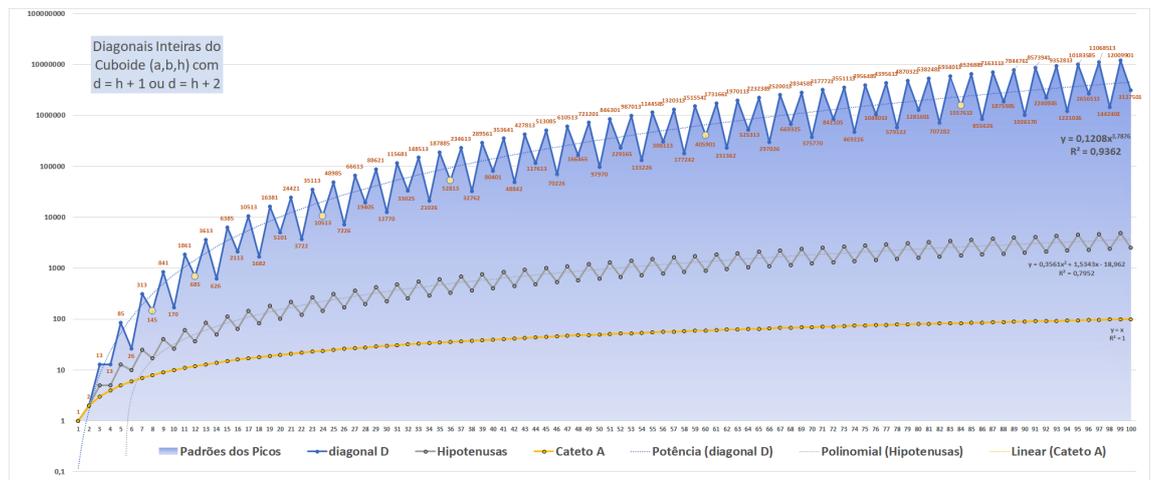


Figura 2: Padrão observado na disposição das diagonais dos cuboides

Neste gráfico, na linha superior de comportamento oscilatório, os picos situados sobre seus máximos locais possuem, como abcissas, os valores ímpares de a . Os picos da linha superior, situados sobre seus mínimos locais, possuem as abcissas pares na forma $a = 4n + 2, n \in \mathbf{Z}_+$. Entre estes valores extremos da linha superior, estão situados os picos que possuem as abcissas $a = 4n, n \in \mathbf{Z}_+^*$.

Desta maneira, conforme sugere a Tabela 2, os valores de d nos picos sobre as coordenadas de máximos locais, ou sobre os picos intermediários, são de **Cuboides Primitivos**. Assim, os valores de d nos picos sobre seus mínimos relativos são de cuboides não primitivos. Ainda na Figura 2, a segunda linha serrilhada que atravessa o interior do gráfico fornece os valores das hipotenusas na trinca pitagórica (a, b, c) que auxiliaram a construção dos cuboides (a, b, h) , ao relaciona-las na equação $c^2 + h^2 = d^2$. Uma forma imediata de recuperar o valor da hipotenusa auxiliar c no cuboide primitivo (a, b, h) é calculando $c = \sqrt{2h + 1}$. Para os cuboides não primitivos da Tabela 2 tem-se $c = 2\sqrt{h + 1}$.

2 Existência e Não-Unicidade do Cuboide Primitivo

Na estratégia inicial para obtenção dos cuboides da Tabela 2, a diagonal c da face retangular de medidas a e b é um valor inteiro. No entanto, se esta condição for relaxada, é possível aumentar a quantidade de cuboides primitivos para um dado valor de edge a , pois, será possível determinar

inteiros h e d na relação $c^2 + h^2 = d^2$ apenas considerando c^2 inteiro. Neste sentido, a Figura 3 ilustra mais de um cuboide primitivo associado ao edge de valor $h = 12$.

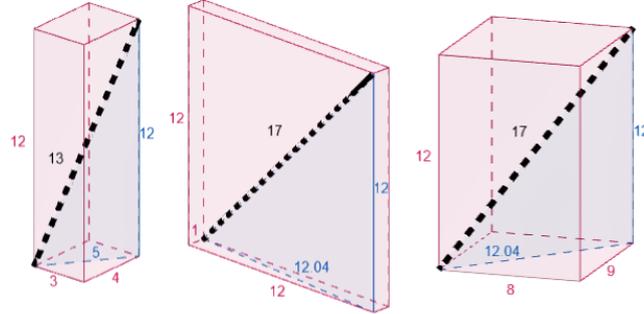


Figura 3: Cuboides primitivos de mesma altura $h = 12$

Na Figura 3, o cuboide $(3, 4, 12)$ foi obtido da junção das duas trincas pitagóricas: $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$. Os dois cuboides primitivos: $(1, 12, 12)$ e $(8, 9, 12)$ são obtidos considerando a decomposição $145 = 1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2$ e $145 + 12^2 = 17^2$. Assim, nesta técnica que permite a relaxação de valor inteiro para a diagonal $\sqrt{a^2 + b^2}$, verifica-se a existência de muitos cuboides primitivos (a, b, h) . Por exemplo, para o edge $b = 12$ são obtidos: $(1, 12, 72)$; $(3, 12, 76)$; $(4, 12, 39)$; $(5, 12, 84)$; $(7, 12, 96)$; $(8, 12, 51)$; $(9, 12, 20)$; $(11, 12, 24)$; $(12, 12, 71)$ e $(13, 12, 156)$. Sugerindo, assim, a não-unicidade dos cuboides primitivos para um edge arbitrário.

Verifica-se na lista acima, e na Tabela 2, a ausência de cuboides primitivos associados aos edges $a = 2, 6, 10$ ou 14 , lançando dúvidas sobre a existência destes sólidos com valores de $a = 4n + 2, n \in \mathbf{Z}_+$. No entanto, é fácil a verificação de que $(1, 2, 2)$ é um cuboide primitivo de diagonal $d = 3$. Para $a = 2$ sendo o menor edge são citados: $(2, 22, 59)$ e $(2, 22, 121)$ como exemplos de cuboides primitivos que possuem as respectivas diagonais espaciais $d = 65$ e $d = 123$.

Infinitos cuboides primitivos associados ao edge $a = 2$ são garantidos no Lema 1:

LEMA 1 Todo número ímpar h de quadrado perfeito determina o seguinte cuboide primitivo $(2, 2\sqrt{h}, h)$ de diagonal espacial $d = h + 2$.

Demonstração Trivial. □

Analogamente, infinitos cuboides primitivos associados ao edge unitário seguem fornecidos no:

LEMA 2 Considere m de quadrado perfeito, então $(1, 2\sqrt{m}, 2m)$ caracteriza um cuboide primitivo de diagonal espacial o ímpar $d = 2m + 1$.

Demonstração Trivial. □

A questão da existência relacionada aos edges $a = 6, 10$ ou 14 , podem ser resolvida na apresentação dos seguintes cuboides primitivos associados ao edge $b = 238$: $(6, 238, 21)$; $(6, 238, 153)$; $(6, 238, 519)$; $(6, 238, 1077)$; $(6, 238, 1407)$; $(6, 238, 2829)$; $(6, 238, 7083)$; $(6, 238, 14169)$; $(10, 238, 91)$; $(10, 238, 305)$; $(10, 238, 7091)$; $(10, 238, 14185)$; $(14, 238, 47)$; $(14, 238, 187)$; $(14, 238, 241)$; $(14, 238, 461)$; $(14, 238, 1411)$; $(14, 238, 2837)$; $(14, 238, 7103)$ e $(14, 238, 14209)$.

Os cuboides acima foram gerados por outro código Python específico. Neste *script*, para um dado número par b que é fornecido acompanhado de um número máximo de iterações $nMax$, são gerados, para cada valor inteiro de $a \in [1, nMax)$, k parâmetros tais que $2k|(a^2 + b^2 - k^2)$ e $k \in [1, a)$. Dessa forma, um total de $nMax$ cuboides associados ao mesmo valor b são dados por:

$$\left(a, b, h = \frac{a^2 + b^2 - k^2}{2k} \right) \tag{6}$$

De fato, seja k um parâmetro satisfazendo o critério de divisibilidade acima. Então, sendo a diagonal espacial do cuboide dada por $d = h + k$, segue que:

$$d = h + k = \frac{a^2 + b^2 - k^2}{2k} + \frac{2k^2}{2k} = \frac{a^2 + b^2 + k^2}{2k} \Rightarrow 2dk - k^2 - d^2 = a^2 + b^2 - d^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (d - k)^2 = -a^2 - b^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + (d - k)^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + h^2 \quad \square$$

Portanto, a equação (6) permite o enunciado do seguinte lema para atestar uma infinidade de cuboides primitivos associados a um número par.

LEMA 3 Considere b_0 um número par fornecido. Então, para cada número a ímpar é possível estabelecer um cuboide primitivo da forma $\left(a, b_0, h = \frac{a^2 + b_0^2 - 1}{2}\right)$ que possui diagonal $d = h + 1$.

Demonstração Basta tomar $b_0 = 2n_0$, $a = 2m + 1$ e $k = 1$ na equação (6). \square

3 Considerações Finais

Nicholas Saunderson (1682-1739) utilizou os três parâmetros da trinca pitagórica (u, v, w) para descrever o Tijolo de Euler $(a, b, h) = (|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|)$. Na abordagem [1], usando apenas um parâmetro livre $a > 2$ e algoritmo Python para busca computacional, foi possível determinar uma sequência ordenada de tijolos primitivos. Da mesma forma, a estratégia apresentada determinou vários Cuboides Primitivos para o mesmo valor de $a > 0$. Ou seja, a investigação implementada revelou a não-unicidade de certos sólidos geométricos que ainda intrigam a Teoria Algébrica dos Números.

Referências

- [1] A. Firmiano et al. “As Infinitas Trincas Pitagóricas de Euclides”. Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** (2020). Aceito, pp. 13–26. DOI: 10.21167/cqdvo117ermac20202afj.
- [2] S. Kitchen. “On The Existence of Perfect Cuboids OURE”. Em: **Opportunities for Undergraduate Research Experience**. 2015.
- [3] FLYING COLOURS MATHS. **The Dictionary of Mathematical Eponymy: The Euler Brick**. Online. Acesso em 04/01/2022, <https://www.flyingcoloursmaths.co.uk/dome-euler-brick/>.
- [4] T. Roberts. “Some Constraints on the existence of a Perfect Cuboid”. Em: **Austral. Math. Soc. Gaz.** 37 (2010), pp. 29–31.
- [5] L. Ronald. **On Perfect Cuboids**. Online. Acesso em 04/01/2022, <https://www.math.leidenuniv.nl/~rvl/ps/cuboids.pdf>.