Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Uso do teorema de ponto fixo de Banach para a determinação de solução de uma Equação do tipo de Kirchhoff

Douglas B. Costa* André L. M. Martinez Marcelo R. A. Ferreira
Coordenação de Matemática, COMAT, UTFPR,
86300-000, Cornélio Procópio, PR
E-mail: britocostadouglas@gmail.com, andrelmmartinez@yahoo.com, marcelorafereira@gmail.com.

RESUMO

Neste trabalho faremos uso do Teorema de Banach para demonstrar a existência e a unicidade de solução para uma equação do tipo de Kirchhoff. A equação apresentada a seguir possui aplicações no estudo de vibrações livres em cordas elásticas (recomendamos[1], [3] e [4]):

$$\begin{cases} -M(||u'||_2^2)u'' = f(t,u,u'), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

onde $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vamos determinar solução para (1) baseado nos resultados apresentados em [2], trabalharemos no espaço de Banach $E = \{u \in C'[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$ com a norma $||u||_E = ||u'||_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |u'(t)|$. As soluções de (1) podem ser escritas da seguinte forma: $u(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\frac{f(s,u(s),u'(s))}{M(||u'||_2^2)}ds$, onde $G(t,s) = \begin{cases} t - ts, t \leq s; \\ s - st, s \leq t. \end{cases}$ Deste modo u é solução de (1) se for ponto fixo do operador $T : E \to E$ definido por:

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\frac{f(s,u(s),u'(s))}{M(||u'||_2^2)}ds.$$

Vamos estabelecer a existência e unicidade de solução, para isto consideremos a sequência iterativa

(i) $u^{k+1} = T(u^k)$ (2)

(ii) $u^{k+1}(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\frac{f(s,u_k(s),u_k'(s))}{M(||u_k'||_2^2)}ds.$

As seguintes hipóteses serão necessárias:

(S1) Existem constantes positivas α, A e B tais que $A \leq M(||u'||_2^2) \leq B, \forall u \in E,$ com $||u||_E \leq \alpha$.

(S2) α e A cumprem $\max\limits_{(s,u,v)\in[0,1]\times[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]\times[-\alpha,\alpha]} |f(s,u,v)| \leq \dfrac{\alpha A}{d_1}$; onde $d_1 = \max\limits_t \left\{\displaystyle\int_0^1 |\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}|ds\right\}$.

(S3) Existe $\lambda_M > 0$, tal que $|M(u) - M(v)| \leq \lambda_M|u - v|, \forall u, v \in [-\alpha, \alpha]$;

(S4) Existe $\lambda_f > 0$ com $|f(s,u,u') - f(s,v,v')| \leq \lambda_f \max |u - v|, |u' - v'|$ onde $s \in [0,1],\ u, v \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$ e $u', v' \in [-\alpha, \alpha]$;

(S5) Vale a seguinte desigualdade $\dfrac{2\lambda_M\alpha^2}{A} + \dfrac{B\lambda_f d_1}{A^2} < 1$.

Teorema 1. *Suponha que (S1)-(S5) ocorra. Então (1) possui solução iterativa com* $||u||_E \leq \alpha$.

*Bolsista de Iniciação Científica PIBIC-UTFPR

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $T : B[0,\alpha] \to B[0,\alpha]$, onde $B[0,\alpha] = \{u \in E; ||u||_E \leq \alpha\}$. De fato, se $u \in B[0,\alpha]$, temos:

$$||(Tu)'||_\infty = \max_t \left\{ \left| \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \frac{f(s,u(s),u'(s))}{M(||u'||_2^2)} ds \right| \right\} \leq \max_s |f(s,u,u')| \frac{1}{M(||u'||_2^2)} \int_0^1 \left| \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} ds \right|,$$

de (S1) e (S2) obtemos: $||(Tu)'||_\infty \leq \left(\frac{\alpha A}{d_1}\right) \frac{1}{M(||u'||_2^2)} d_1 \leq \frac{\alpha A}{d_1} \left(\frac{1}{A}\right) d_1 = \alpha \Rightarrow ||(Tu)'||_\infty \leq \alpha$. Portanto, $T : B[0,\alpha] \to B[0,\alpha]$. Vamos mostrar que T é uma contração e então obter o resultado do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Segue de (S2), (S3) e (S4) que

$$\begin{aligned}
||(Tu - Tv)'||_\infty &= \max_t \left\{ \left| \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \left[\frac{f(s,u(s),u'(s))}{M(||u'||_2^2)} - \frac{f(s,v(s),v'(s))}{M(||v'||_2^2)} \right] ds \right| \right\} \\
&\leq d_1 \max_s \left\{ \left| \frac{f(s,u(s),u'(s)}{M(||u'||_2^2)} - \frac{f(s,v(s),v'(s))}{M(||v'||_2^2)} \right| \right\} \\
&\leq d_1 \frac{1}{A^2} \max_s |M(||v'||_2^2) f(s,u(s),u'(s)) - M(||u'||_2^2) f(s,v(s),v'(s)) \\
&\leq \frac{d_1}{A^2} [|M(||v'||_2^2) - M(||u'||_2^2)| \max_s |f(s,u(s),u'(s))| + \\
&\qquad M(||u'||_2^2) \max_s |f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s))|] \\
&\leq \frac{d_1}{A^2} \left[\lambda_M |||v'||_2^2 - ||u'||_2^2 \left(\frac{\alpha A}{d_1}\right) + B\lambda_f ||u' - v'||_\infty \right].
\end{aligned}$$

Note que $|||v'||_2^2 - ||u'||_2^2| = \left| \int_0^1 ([v'(s)]^2 - [u'(s)]^2) ds \right| \leq \int_0^1 |[v'(s) + u'(s)][v'(s) - u'(s)]| ds \leq ||u' + v'||_\infty ||u' - v'||_\infty$, assim

$$\begin{aligned}
||(Tu - Tv)'||_\infty &\leq \frac{d_1}{A^2} \left[\lambda_M ||u' + v'||_\infty ||u' - v'||_\infty \left(\frac{\alpha A}{d_1}\right) + B\lambda_f ||u' - v'||_\infty \right] \\
&\leq \frac{d_1}{A^2} \left[\lambda_M (2\alpha)(||u' - v'||_\infty) \left(\frac{\alpha A}{d_1}\right) + B\lambda_f ||u' - v'||_\infty \right] \\
&\leq \left(\frac{2\lambda_M \alpha^2}{A} + \frac{B\lambda_f d_1}{A^2} \right) ||u' - v'||_\infty.
\end{aligned}$$

Segue de (S5) que $T : B[0,\alpha] \to B : [0,\alpha]$ é uma contração. □

Este estudo encontra-se em fase inicial e pretendemos além de explorar os resultados teóricos fornecidos pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach vamos também realizar testes numéricos com algoritmos baseados na sequencia iterativa definida em (2).

Palavras-chave: *Equação de Kirchhoff, Ponto fixo, Teorema de Banach*

Referências

[1] R.P. Agarwal, M. Meehan e D.O'Regan. "Fixed Point Theory and Applications". Cambridge University Press, Cambridge (2011).

[2] A.L.M. Martinez, E.V.Castelani, J.da Silva, W.V.IShirabayashi A note about positive solutions for an equation of Kirchhoff type, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (2011) 2082-2090.

[3] R.K. Sharma, Iteractive solutions to boundary-value differential equations with reflection of the argument, J. Comp. Appl. Math. 24(1988) 319-326.

[4] T.F. Ma, E.S. Miranda, A nonlinear differencial equation involving reflection of the argument, Arch. Math. 40 (2004) 63-68.

[5] T.F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Analysis (63), 2005, 1967-1977.