Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Otimização do parâmetro de divergência para solução do modelo de viga de Euler-Bernoulli

Bruna T. S. Sozzo[1]
Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ
Jaime E. M. Rivera[2]
Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ
Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ

Resumo. A eliminação do ruído e do efeito de vibração de estruturas elásticas é um tópico importante na ciência dos materiais. Esses efeitos podem ser investigados estudando características da solução do modelo de viga de Euler-Bernoulli. Resultados importantes da teoria de semigrupos permitem caracterizar a solução do problema indicando propriedades no efeito de vibração das estruturas. No entanto, um resultado pouco estudado na literatura é a solução do modelo pertencer a uma classe de Gevrey. A dificuldade em encontrar um resultado sobre a otimalidade da classe de Gevrey analiticamente nos motivou a buscar resultados numéricos. Nesse sentido, este trabalho utiliza o método de diferenças finitas para mostrar que a classe de Gevrey do modelo de viga de Euler-Bernoulli com dissipação viscoelástica localizada do tipo Kelvin-Voigh pode ser a classe ótima. Este resultado encontra-se ainda em aberto do ponto de vista analítico.

Palavras-chave. Classe de Gevrey, Diferenças Finitas, Modelo de Vigas, Modelo com Descontinuidade.

1 Introdução

Modelos que representam o efeito vibratório de estruturas como a equação de viga e placa com dissipação localizada têm chamado a atenção de muitos pesquisadores. Quando distribuímos os mecanismos dissipativos ao longo de todo material, propriedades como estabilidade assintótica ou analiticidade são bem compreendidas. No entanto, propriedades que caracterizam soluções de problemas com mais de um material ainda não são bem claras. Em [6], mostramos que o modelo de viga de Euler-Bernoulli com dissipação localizada de Kelvin-Voigh possui solução na classe de Gevrey 8. Isso significa que a solução é exponencialmente estável, possui efeito de regularização (para qualquer dado inicial tomado no espaço de fase do problema, a solução é infinitamente diferenciável) e, quando escrita em série de potência, a solução diverge com taxa de divergência igual a 8 (classe de Gevrey 8), ver [3–5, 7]. Um resultado importante consiste em mostrar que a classe de Gevrey encontrada é a classe ótima, resultado ainda não encontrado analiticamente. Motivados pela falta de um resultado analítico, neste trabalho, apresentamos um resultado que é uma extensão do trabalho [6], sendo problema aberto do ponto de vista analítico.

Como o resultado é encontrado utilizando elementos da teoria de semigrupos, na Seção 2, introduzimos uma contextualização, onde descrevemos e esclarecemos alguns elementos importantes do modelo trabalhado. Na Seção 3, detalhamos como foram realizadas a discretização e a simulação numérica para o resultado buscado. Por fim, na Seção 4, algumas considerações finais.

[1]bsozzo@lncc.br
[2]jemunozrivera@gmail.com

2 Contextualização

Como foi mencionado anteriormente, quando não encotramos resultados analíticos para um problema, um caminho é buscar uma aproximação utilizando métodos numéricos. No trabalho intitulado *The Gevrey Class of the Euler-Bernoulli Beam Model*, [6], nós mostramos que o semigrupo associado ao modelo de vigas de Euler-Bernoulli com mecanismo dissipativo localizado de Kelvin-Voigh, está na classe 8 de Gevrey. O sistema que descreve esse modelo é dado por

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho(x)u_{tt} + (\alpha(x)u_{xx} + \alpha_0(x)u_{txx})_{xx} = 0, & \text{em} \quad (0,l_0)\cup(l_0,l)\times(0,T) \\ u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \end{array}\right. \tag{1}$$

em que

$$\rho(x) = \left\{\begin{array}{l} \rho_1 \text{ se } x\in(0,l_0) \\ \rho_2 \text{ se } \ x\in(l_0,l), \end{array}\right. \quad \alpha(x) = \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \text{ se } x\in(0,l_0) \\ \alpha_2 \text{ se } x\in(l_0,l), \end{array}\right. \quad \alpha_0(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ se } x\in(0,l_0) \\ \alpha_0 \text{ se } x\in(l_0,l), \end{array}\right. \tag{2}$$

e $\rho_1, \rho_2, \alpha_0, \alpha_1$ e α_2 são constantes positivas. Denotando $M := \alpha(x)u_{xx} + \alpha_0(x)u_{txx}$, a solução deve satisfazer às seguintes condições de transmissão

$$u(l_0^-,t) = u(l_0^+,t), \quad u_x(l_0^-,t) = u_x(l_0^+,t), \quad M(l_0^-,t) = M(l_0^+,t), \quad M_x(l_0^-,t) = M_x(l_0^+,t). \tag{3}$$

Para mostrar que o semigrupo associado ao problema descrito anteriormente está na classe de Gevrey 8, foi utilizada a teoria de semigrupos, que consiste em estudar propriedades e algumas características da solução do problema estudando o problema transformado (problema abstrato ou problema de Cauchy abstrato). Fazemos isso começando com a escolha de um espaço de fase para a energia do problema

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,l)\times L^2(0,l) \tag{4}$$

equipado com a norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell \alpha|u_{xx}|^2 + \rho|v|^2 \, dx. \tag{5}$$

Além disso, denotamos $U = [u,v]$, com $v = u_t$, então

$$U_t \quad = \quad \left[\begin{array}{c} u_t \\ v_t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} v \\ -\frac{1}{\rho}M_{xx} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ll} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\rho}(\alpha\partial_{xx})_{xx} & -\frac{1}{\rho}(\alpha_0\partial_{xx})_{xx} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] = AU, \tag{6}$$

com

$$D(A) = \{(u,v);\ u,v\in H_0^2(0,l),\ M\in H^2(0,l)\}. \tag{7}$$

Ou seja, o problema de valor inicial e contorno pode ser reescrito como um problema apenas de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} U_t - AU = 0, \quad t>0 \\ U(0) = U_0, \end{array}\right. \tag{8}$$

com $U(0) = [u_0,u_1]^T := U_0$ e solução $U(t) = e^{At}U_0$ em que chamamos e^{At} de semigrupo associado ao problema (1). Estudar características para o semigrupo associado ao problema implica estudar propriedades para a solução do problema. Ver mais informações em [4, 5].

Para caracterizarmos um semigrupo na classe δ de Gevrey, utilizamos o Teorema 2.1, que pode

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0290

ser encontrado em [7].

Teorema 2.1. *Seja* $S = (S(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo fortemente contínuo em um espaço de Hilbert limitado* X*. Supondo que o gerador infinitesimal* A *do semigrupo* S *satisfaz a seguinte estimativa, para algum* $0 < \mu < 1$*:*

$$\lim_{\lambda\in\mathbb{R},\ |\lambda|\to\infty} \sup |\lambda|^{\mu}\|(i\lambda - A)^{-1}\| < \infty. \tag{9}$$

Então, $S = (S(t))_{t\geq 0}$ *está na classe* δ *de Gevrey para* $t > 0$*, e para cada* $\delta > \dfrac{1}{\mu}$*.*

Observação 2.1. *Quando* $\mu = 1$*, o semigrupo é chamado de semigrupo analítico e, quando escrevemos a solução do problema em série de potência, a série converge.*

Para encontrarmos o resultado buscado, consideramos $\hat{U}$ como a transformada de Laplace de U, desse modo

$$i\lambda\hat{U} - A\hat{U} = \hat{U}_0 \quad\Rightarrow\quad \hat{U} = (i\lambda I - A)^{-1}\hat{U}_0. \tag{10}$$

Com $\hat{U}_0 := F \in \mathcal{H}$. Consequentemente, $U = \mathcal{L}^{-1}\left[(i\lambda I - A)^{-1}\hat{U}_0\right] = e^{At}U_0$. O sistema $i\lambda\hat{U} - A\hat{U} = F$ é o que chamamos de sistema resolvente para do problema (8). Escrevendo a equação resolvente em termo de seus componentes

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \quad \in \quad H_0^2(0,l) \\ i\lambda v + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 v_{xx})_{xx} = \rho f_2 \quad \in \quad L^2(0,l). \end{cases} \tag{11}$$

Mostrar que a desigualdade (9) é válida é o mesmo que mostrar que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|\lambda|^{\frac{1}{8}}\|(i\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C. \tag{12}$$

Em [6], mostramos que, dado $F \in \mathcal{H}$, existe uma única solução $U \in D(A)$ tal que $(i\lambda I - A)U = F$, consequentemente, $U = (i\lambda I - A)^{-1}F$. Então, para mostrar que o semigrupo associado ao problema de evolução (1) está na classe de Gevrey 8, basta mostrar que, quando $\lambda \to \infty$,

$$|\lambda|^{\frac{1}{8}}\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Além disso, para mostrar que a classe é ótima, basta mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$

$$|\lambda|^{\frac{1}{8}+\epsilon}\|U\|_{\mathcal{H}} \to \infty.$$

A otimalidade da classe de Gevrey para a solução do problema abordado ainda é um problema em aberto do ponto de vista analítico. Nesse sentido, segue a motivação da realização desse trabalho: conjecturar numericamente que a classe encontrada é a classe ótima ou, devido a questões numéricas, ela é uma classe muito próxima da ótima, uma vez que encontremos métodos numéricos mais eficazes do que o que utilizamos aqui. Na próxima seção, exibiremos como encontramos o resultado que mostra que a classe de Gevrey encontrada em [6] pode ser classe ótima.

3 Simulação numérica

Nesta seção vamos encontrar uma aproximação numérica para as variáveis u e v, para que possamos então encontrar uma aproximação para $\|U\|_{\mathcal{H}}$. Utilizamos o método de diferenças finitas por questão de simplicidade, uma vez que os métodos de diferenças finitas e elementos finitos são equivalentes para problemas unidimensionais. Sabendo que u e v satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \quad \in \quad H_0^2(0,l) \\ i\lambda v + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 v_{xx})_{xx} = \rho f_2 \quad \in \quad L^2(0,l), \end{cases} \tag{13}$$

isolamos v na primeira equação e substituimos na segunda, chegamos a

$$-\lambda^2 u + (\alpha u_{xx})_{xx} + i\lambda(\alpha_0 u_{xx})_{xx} = \rho f_2 + i\lambda f_1 + \alpha_0 f_{1xxxx} \quad \in \quad L^2(0,l).$$

Lembrando que o material da viga é heterogêneo: composto por uma parte elástica, $(0,l_0)$, e uma parte viscoelástica, (l_0,l), então

$$\begin{cases} \underbrace{-\lambda^2}_{Ae} u + \underbrace{\alpha_1}_{Be} u_{xxxx} = \underbrace{\rho_1 f_2 + \lambda f_1}_{Ce}, \quad \text{em} \quad (0,l_0) \\ \underbrace{-\lambda^2}_{Av} u + \underbrace{(\alpha_2 + i\lambda\alpha_0)}_{Bv} u_{xxxx} = \underbrace{\rho_2 f_2 + i\lambda f_1 + \alpha_0 f_{1,xxxx}}_{Cv}, \quad \text{em} \quad (l_0,l), \end{cases}$$

onde utilizamos as constantes Ae, Be e Ce no intervalo elástico e as constantes Av, Bv e Cv no intervalo viscoelástico. Usando diferença centrada duas vezes, nós obtemos a seguinte discretização de ordem quadrática:

$$\frac{B_i}{h_i^4} u_{j-2} - \frac{4B_i}{h_i^4} u_{j-1} + \left[A_i + \frac{6B_i}{h_i^4}\right] u_j - \frac{4B_i}{h_i^4} u_{j+1} + \frac{B_i}{h_i^4} u_{j+2} = C_i, \tag{14}$$

onde $i = e$ no intervalo elástico e $i = v$ no intervalo viscoelástico.

Lema 3.1. *Em relação à discretização* (14)*, as seguintes afirmações são válidas: (i) é consistente com o sistema* (13)*, (ii) é condicionalmente estável, e (iii) é convergente.*

Demonstração. Expandindo os termos $u_{j-2}, u_{j-1}, u_{j+1}$ e u_{j+2} em série de Taylor (com $x = x_0$) encontramos uma expansão com erro $\mathcal{O}(h^6)$, substituindo em (14), obtemos

$$A_i u(x_0) + B_i u_{xxxx}(x_0) - \frac{6B_i \mathcal{O}(h_i^6)}{h_i^4} = C_i, \tag{15}$$

isto é, quando $h \to 0$, o sistema discreto se aproxima do sistema contínuo, mostrando que o método utilizado é consistente.

Para analisar a estabilidade, nós usamos o critério de Von Neumann e concluímos que nosso método é estável quando nossas variáveis satisfazem a seguinte condição

$$h_i \geq \sqrt[4]{24B_i}. \tag{16}$$

Os cálculos realizados para encontrar a condição (16) não são triviais e foram realizadas com o auxílio do *software Maple*.

Portanto, uma vez que o método é consistente, sob a condição (16), o método converge. □

A discretização (14) é equivalente ao sistema $Au = y$, onde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz dos coeficientes e n é o número de partições da malha. O principal desafio encontrado nesse problema é a discontinuidade dos coeficientes do modelo, uma vez que o domínio é composto por dois materiais. Para a implementação, nós utilizamos uma técnica proposta por [1] para a introdução das condições de transmissão $u(l_0^-) = u(l_0^+)$ e $u_x(l_0^-) = u_x(l_0^+)$. A primeira condição é estabelecida tomando a média dos coeficientes de ambos os intervalos quando $x = l_0$ e introduzindo na matriz de coeficientes. Para a segunda condição, fazemos uma aproximação por diferenças regressivas em $u_x(l_0^-)$ e progressiva em $u_x(l_0^+)$ encontrando a relação $u_j = \dfrac{u_{j-1} + u_{j+1}}{2}$, que é inserida diretamente no cálculo da solução de u.

O algoritmo utilizado para resolver o sistema consiste em transformar a matriz A, que é uma matriz pentadiagonal, em uma matriz triangular inferior. A partir da triangularização, resolvemos o problema numericamente de acordo com o algoritmo descrito em [2]. O algoritmo foi desenvolvido na linguagem de programação C++. Os valores das constantes e alguns parâmetros estão na Tabela 1.

Tabela 1: Valores dos parâmetros do modelo (1)-(3)

Parâmetro	**Significado**	**Valor**
ρ_1	densidade de massa $\times$ seção trasnversal	9.4×10^{-6}
ρ_2	densidade de massa $\times$ seção trasnversal	1.4×10^{-5}
α_0	coeficiente de dissipação	1.0×10^{-6}
α_1	módulo de elasticidade $\times$ momento de inércia	0.1166
α_2	módulo de elasticidade $\times$ momento de inércia	1.5
h_e	espaçamento no intervalo elástico	0.1
h_v	espaçamento no intervalo viscoelástico	0.1
f_1	função dada	$((x-5)(x+5)x)^5$
f_2	função dada	$sgn(x)$
n	ponto da malha	100
$(0, l)$	intervalo	$(-5, 5)$
l_0	ponto de transmissão	0

Uma vez que encontramos a solução u para o sistema resolvente (13), também encontramos uma solução para a variável v. Dessa forma, podemos calcular a norma de $U = (u, v)$, que é dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \left[\int_{-5}^{5} \alpha |u_{xx}|^2 dx + \int_{-5}^{5} \rho |v|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Para calcular a norma de U, primeiro aproximamos o termo u_{xx} por diferenças centradas de segunda ordem, então calculamos a integral definida em (17) usando a Regra Composta $\dfrac{3}{8}$ de Simpson, pois é um método simples com erro $\mathcal{O}(h^5)$.

Finalmente, como a solução U depende do parâmetro λ, então tomamos λ como uma variável independente e analisamos o comportamento de $|\lambda|^\mu \|U\|_{\mathcal{H}}$ para alguns valores de interesse de μ, que são valores entre 0 e 1, pois são os valores que vão caracterizar a classe de Gevrey. É válido ressaltar aqui que estamos interessados em valores altos de λ, por esse motivo valores entre $[0, 1]$ não são relevantes. Para uma visão geral, os gráficos da primeira coluna são gerados com $\lambda \in [1, 800]$. Na segunda coluna, $\lambda \in [500, 800]$, o que nos ajuda a entender o comportamento do gráfico, de forma mais clara, quando λ assume valores maiores.

Pelos resultados apresentados nos gráficos da Tabela 2, percebe-se que, conforme λ toma valores maiores, $|\lambda|^\mu \|U\|_{\mathcal{H}}$ continua limitado quando $\mu \leq \dfrac{1}{8}$. No entanto, quando $\mu > \dfrac{1}{8}$, o gráfico de $|\lambda|^\mu \|U\|_{\mathcal{H}}$ não permanece limitado. Devido a esse comportamento, podemos concluir que a classe de Gevrey é a taxa ótima ou está muito próxima da taxa ótima, uma vez que modelos numéricos mais sofisticados podem obter resultados mais precisos.

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0290

4 Considerações finais

Neste trabalho, tratamos o problema com apenas um ponto de descontinuidade, seguindo a configuração do material de [6]. Caso optemos por localizar o material dissipativo viscoelástico em outras e/ou mais localizações, basta tratar os pontos de descontinuidade de maneira similar ao que tratamos em l_0, sem alteração no resultado encontrado. Utilizamos o método das diferenças finitas e mostramos a corroboração do comportamento da solução do modelo de viga de Euler-Bernoulli com mecanismo dissipativo de Kelvin-Voigh. Com os resultados obtidos, pode-se concluir que a taxa de Gevrey encontrada em [6] pode ser a taxa ótima. Além disso, um resultado que não foi apresentado aqui, mostrou que a solução u e v para o problema transformado são soluções que satisfazem os resultados obtidos sobre o comportamento da solução encontrado em [6]: soluções suaves mesmo utilizando a condição inicial $sgn(x)$ e se aproximam de zero quando λ cresce.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Projeto CNPq 310249/2018-0, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] T. L. Bergman et al. **Introduction to Heat Transfer**. Wiley, 2011. ISBN: 9780470501962.

[2] A. Karawia. "On Solving Pentadiagonal Linear Systems via Transformations". Em: **Mathematical Problems in Engineering** 2015 (set. de 2014). DOI: 10.1155/2015/232456.

[3] E. Klaus-Jochen. **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**. Vol. 63. Jun. de 2001, pp. 278–280. DOI: 10.1007/s002330010042.

[4] Z. Liu e S. Zheng. **Semigroups Associated with Dissipative Systems**. Chapman e Hall/CRC, 1999, p. 224. ISBN: 9780849306150.

[5] A. Pazy. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. 3Island Press, 1992. ISBN: 9781461255628.

[6] B. T. S. Sozzo e J. E. M. Rivera. "The Gevrey class of the Euler-Bernoulli beam model". Em: **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 505.1 (2022), p. 125619. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125619.

[7] S. W. Taylor. "Gevrey Regularity of Solutions of Evolution Equations and Boundary Controllability". 182 pp. Tese de doutorado. School of Mathematics, 1989.

Tabela 2: Gráficos com os resultados de $|\lambda|^{\mu}\|U\|_{\mathcal{H}}$ em função de λ, com diferentes valores de μ