Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Grafos Lollipop e energia laplaciana

Bruno Scaratti Veloso[1]
UFRGS, Porto Alegre, RS
Rodrigo Orsini Braga[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

A teoria espectral de grafos é uma área da matemática que procura obter propriedades estruturais de grafos a partir de matrizes associadas ao grafo, utilizando ferramentas de álgebra linear. Para tal, são definidas algumas matrizes a partir de características estruturais dos grafos, como a matriz de adjacência, que utiliza as conexões entre vértices para definir os valores das entradas da matriz. Com esta matriz, define-se a matriz laplaciana de um grafo G, que é dada por $L = D - A$, onde D é uma matriz diagonal cuja entrada ii é o grau do vértice i e A a matriz de adjacência.

A partir da matriz laplaciana e seu espectro, podemos definir a Energia Laplaciana de um grafo G, que é dada pela seguinte expressão:

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \frac{2m}{n}| \tag{1}$$

onde m e n são o número de arestas e de vértices, respectivamente, e $\mu_1 \geq \mu_2 ... \geq \mu_n = 0$ são os autovalores laplacianos de G.

Um problema de grande interesse na teoria espectral de grafos é determinar os grafos com energia extremal. Para grafos unicíclicos, a conjectura é que o grafo chamado de $H(n)$ é o de maior energia entre todos os grafos com n vértices [2].

Nós estudamos um certo tipo de grafos unicíclicos que são candidatos a serem os grafos de menor energia laplaciana entre os grafos unicíclicos [4]. Estes grafos são obtidos adicionando uma aresta entre um vértice de um ciclo de comprimento 4 e um vértice pendente de um caminho, e são chamados de Lollipop, vamos denotar eles por $L_{n,4}$, onde n é o número de vértices. Utilizando o software AutoGraphiX [1] verificamos que a conjectura estabelecida em [4] é verdadeira para $13 \leq n \leq 50$. Além disso, se $\mu(G)$ for o índice laplaciano de G, conseguimos mostrar que a sequência $\mu(L_{n,4})$ converge e determinamos o seu limite.

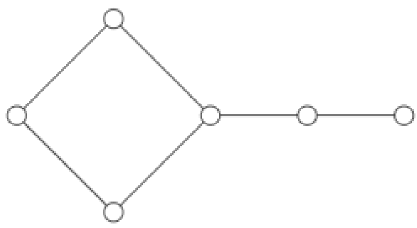

Figura 1: Grafo $L_{6,4}$.

[1] brunoscaratti99@gmail.com
[2] rbraga@ufrgs.br

Por fim, trabalhamos com uma família mais geral dos grafos Lollipop da forma $L_{n,k}$ para qualquer ciclo de comprimento $k \geq 3$. Fixando k e denotando $\mu_k = \lim_{n\to\infty} \mu(L_{n,k})$ o limite dos índices da matriz laplaciana dos grafos $L_{n,k}$, então observamos que se o comprimento do ciclo k for ímpar, este limite será menor que $\frac{9}{2}$, e se k for par, será maior que $\frac{9}{2}$. Ao final, conseguimos provar parcialmente que ambas subsequências convergem para o valor de $\frac{9}{2}$, um resultado particular dos Pontos Limites de Hoffman [3].

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor Rodrigo Braga por aceitar ser meu orientador, e também ao CNPq pela oportunidade de me tornar um bolsista de iniciação científica.

Referências

[1] Gilles Caporossi e Pierre Hansen. "Variable neighborhood search for extremal graphs. 1. The AutoGraphiX system". Em: **Discrete Mathematics** (2000). Aceito. DOI: 10.1016/S0012-365X(99)00206-X.

[2] Kinkar Ch. Das et al. "Maximum Laplacian energy of unicyclic graphs". Em: **Discrete Applied Mathematics** (2017). Aceito. DOI: 10.1016/j.dam.2016.10.023.

[3] A.J Hoffman e J. Smith. "On the spectral radii of topologiacally equivalent graphs". Em: **Recent Advances in Graph Theory** (1975). Aceito.

[4] Lisandra Pires e Virgínia Rodrigues. **Grafos unicíclicos com energia laplaciana mínima**. Online. Acessado em 15/02/2022, https://www.youtube.com/watch?v=SXeynuRutsQ.