

Métodos assintóticos em física matemática

Gabriel Passarelli¹

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo (ICMC/USP), São Carlos, SP

Nosso objetivo neste trabalho foi estudar algumas das técnicas clássicas para integrais da análise assintótica. Mais precisamente, o Método de Laplace e o Método do Decaimento Máximo [2]. Como ilustração dos métodos estudados, inspirados pelo estudo [1] redescobrimos um resultado clássico de Szegő que determina o conjunto limite de zeros de aproximações da função exponencial.

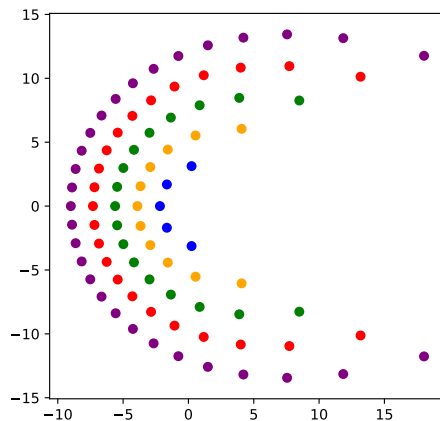


Figura 1: Zeros dos polinômios de Taylor da exponencial em torno da origem. Os pontos azuis são os zeros do polinômio de grau cinco, os amarelos, do de grau onze, os verdes, do de grau dezessete, os vermelhos, do de grau vinte e três, e os roxos, do de grau vinte e nove.

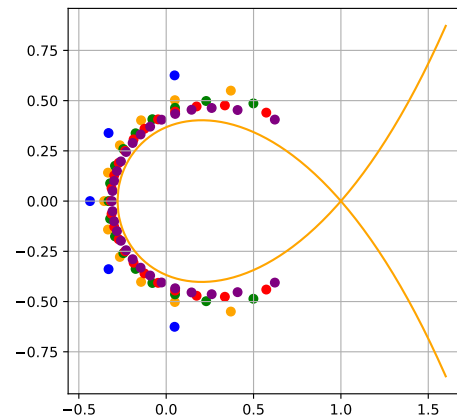


Figura 2: Em amarelo, a curva de Szegő. Pontos coloridos e em torno da curva de Szegő, os zeros dos polinômios de Taylor rescalados da exponencial.

Como se sabe, a expansão em série de Taylor da função exponencial em torno da origem é convergente em todo plano complexo. As somas parciais dessa série, também chamadas de Polinômios de Taylor, nos fornecem aproximações para a função exponencial, que se tornam melhores quando aumentamos o grau dos polinômios. Por serem polinômios, as aproximações possuem raízes no plano, e elas virão em mesmo número que o grau do polinômio. Contudo, a exponencial não se anula no plano. Dessa forma, a pergunta natural é: o que acontece com os zeros dos Polinômios de Taylor quando sua ordem cresce? Como se vê na Figura 1, os zeros escapam do plano, e, em nosso

¹gabrielpassarelli@usp.br

estudo, mostramos que eles fazem esse movimento de uma forma especial, e com uma velocidade também por nós calculada.

Para fazer a análise do movimento dos zeros, nos utilizamos do Método do Decaimento Máximo aplicado sobre uma representação integral das somas parciais da série de Taylor da exponencial, obtida a partir da Fórmula Integral de Cauchy. Esse método dá expansões assintóticas às chamadas *integrais exponenciais*, no caso em que nosso domínio de integração é uma curva no plano. Sua construção é feita através de resultados clássicos da análise complexa, como Teorema dos Resíduos e algumas propriedades chave das funções analíticas, aliados ao Método de Laplace, que, por sua vez, é fortemente baseado no chamado Lema de Watson. Este teorema consiste na base da teoria que estudamos.

Em nossos resultados, após reescalar a variável da soma parcial por $1/N$, pudemos comprovar, através de um argumento envolvendo noções de uniformidade, que os zeros se concentram sobre uma região específica do plano, chamada curva de Szegő, e dada implicitamente pela equação

$$|ze^{1-z}| = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Em outras palavras, mostramos que, a uma certa distância da curva de Szegő o termo líder da expansão assintótica da soma parcial reescalada de ordem N não se anula para nenhum N suficientemente grande. Isto é ilustrado na Figura 2.

Agradecimentos

Agradeço à Fapesp pelo financiamento através do projeto 2019/16062-1, que possibilitou a execução desta Iniciação Científica.

Referências

- [1] T. Kriecherbauer et al. **Locating the zeros of partial sums of $\exp(z)$ with Riemann-Hilbert methods**. 2007. arXiv: 0709.1213 [math.CA].
- [2] Peter D. Miller. **Applied asymptotic analysis**. Vol. 75. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, pp. xvi+467. ISBN: 0-8218-4078-9. DOI: 10.1090/gsm/075. URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/075>.