Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Fórmulas Probabilísticas para Equações Diferenciais Parciais

Pietra S. Kodama [1], Fabiano B. da Silva[2]
UNESP, Bauru, SP

Dentre as inúmeras aplicações do Movimento Browniano (MB) pode-se destacar seu uso para a resolução de equações diferenciais parciais (EDPs), como por exemplo o problema de valor de fronteira (PVF) com condição de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u &= 1 \quad \text{em} \quad U \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial U \end{cases} \tag{1}$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado com fronteira suave ∂U e Δu é o Laplaciano de u. É de conhecimento prático que problemas como esse nem sempre apresentam solução analítica viável e, na maioria das aplicações, exigem métodos numéricos para se aproximar uma solução a depender das condições enunciadas. Segundo a teoria de EDPs, existe uma única solução u para o problema (1), essa que pode ser determinada por uma fórmula probabilística [3]. O objetivo principal deste trabalho é analisar a construção dessa fórmula, obtida como uma aplicação da Fórmula de Dynkin que é uma consequência da Fórmula de Itô para tempo de parada finito q.s. e envolve o gerador infinitesimal do processo estocástico escolhido a fim de resolver o problema proposto.

A irregularidade de processos estocásticos contínuos que não são de variação finita, como é o caso do MB, impossibilita o uso de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para o seu estudo infinitesimal, e por conta disso se faz necessário o Cálculo Estocástico [4]. Uma das ferramentas empregadas para esse fim, é o gerador infinitesimal que objetiva estudar as infinitesimais variações da média de um processo estocástico $X_t = X(t)$, através do operador A definido por:

$$Au(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[u(X_t)] - u(x)}{t}, \tag{2}$$

para qualquer função suave $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com suporte compacto ($u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$), onde $\mathbb{E}^x$ representa a média dada a condição inicial $X_0 = x$ [2]. Quando o processo X_t é uma difusão de Itô, a grosso modo pode-se dizer que sua variação "dX_t" para um determinado tempo t, é uma combinação de um deslocamento determinístico e outro estocástico, ou seja, satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW(t), \tag{3}$$

onde $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t))$ é um MB m-dimensional, e $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, funções mesuráveis. Para estes processos o gerador infinitesimal é dado por

$$Au(x) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma\sigma^T)_{ij}(x), \tag{4}$$

[1] ps.kodama@unesp.br
[2] fabiano.borges@unesp.br

cujos significados da matriz σ, chamada dispersão, e do produto $\sigma\sigma^T$, chamado difusão, são encontrados na Física (ver [2]). Em particular, se o processo é o próprio MB, então a é a função nula e σ é a identidade, pois assim X_t passa a ser solução da equação diferencial estocástica $dX_t = dW(t)$. Logo, segue de (4) que o gerador infinitesimal do movimento Browniano é

$$Au(X_t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\Delta u(X_t). \tag{5}$$

Essa ferramenta, permite a construção de um teorema conhecido como *fórmula de Dynkin*, que fornece a média de uma função suave aplicada sobre uma difusão de Itô em determinado tempo de parada, como enuncia [2]:

Teorema 0.1 (Fórmula de Dynkin)**.** *Seja $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e X_t uma difusão de Itô iniciada em x. Se τ é o tempo de parada com $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, então*

$$\mathbb{E}^x[u(X_\tau)] = u(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau Au(X_s)ds\right], \tag{6}$$

onde A é o gerador infinitesimal do processo X_t.

Vale observar que, segundo [3], todos os caminhos do MB iniciados num ponto $x \in U$, eventualmente atingirão a fronteira com probabilidade 1. Logo, $\mathbb{E}(\tau) < \infty$, e portanto, para o MB (B_t) segue que

$$\mathbb{E}^x[u(B_\tau)] = u(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \frac{1}{2}\Delta u(B_s)ds\right]. \tag{7}$$

E por fim das condições do PVF tem-se

$$u(x) = \mathbb{E}^x[\tau], \tag{8}$$

para todo $x \in U$. Ou seja, o valor da função u no ponto $x \in U$ pode ser obtido pela média do tempo que o MB iniciado em x leva para atingir a fronteira ∂U.

O resultado obtido acima, cuja prova completa faz parte deste trabalho, é apenas um caso particular. É possível ainda utilizar a Fórmula de Dynkin para se obter uma fórmula probabilística para o problema de Dirichlet que consiste em achar uma função harmônica u em U ($\Delta u = 0$ em U) que satisfaça uma condição de fronteira dada por uma função mensurável $g : \partial U \to \mathbb{R}$ ($u = g$ em ∂U) (para maiores detalhes, ver [5]). Outros casos interessantes podem ser vistos, por exemplo, em [3] e alguns resultados recentes em [1] mostram que além de este ser um assunto interessante por conectar EDPs com a teoria de probabilidade, também é assunto relevante em pesquisa.

Referências

[1] L. Cadeddu e M. A. Farina. "A short note on the mean exit time of the Brownian motion". Em: **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics** (2017). DOI: 10.1142/s0219887817501730.

[2] O. Calin. **An Informal Introduction to Stochastic Calculus with Applications**. Singapore: World Scientific, 2015. ISBN: 9789814678933.

[3] L. Evans. **An introduction to stochastic differential equations**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2013. ISBN: 9781470416126.

[4] F. C. Klebaner. **Introduction to Stochastic Calculus with Applications**. 2a. ed. London: Imperial College Press, 2005. ISBN: 1860945554.

[5] P. R. C. Ruffino. **Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. ISBN: 978-85-244-0304-0.

