Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Método espectral para encontrar ondas solitárias para as equações de Euler com vorticidade

Eduardo M. Castro[1] Roberto Ribeiro-Jr[2]
DMAT/UFPR, Curitiba, PR
Marcelo V. Flamarion[3]
UACSA/UFRPE, Cabo de Santo Agostinho, PE

Este trabalho versa sobre ondas aquáticas viajantes com velocidade constante c interagindo com uma correnteza submersa que varia linearmente com a profundidade. Sob essas hipóteses, o objetivo principal é construir um esquema numérico para encontrar ondas solitárias para as equações de Euler.

Matematicamente, este problema consiste em determinar o perfil da onda de superfície livre (ζ) e sua velocidade (c). As equações governantes desse problema escritas em variáveis adimensionais são as equações de Euler:

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{em } -1 < Y < \zeta(X), \tag{1}$$
$$-c\zeta_X + (F + \Omega\zeta + \phi_X)\zeta_X = \phi_Y \qquad \text{sobre } Y = \zeta(X), \tag{2}$$
$$-c\phi_X + \frac{1}{2}(\phi_X^2 + \phi_Y^2) + (\Omega\zeta + F)\phi_X + \zeta - \Omega\psi = B \qquad \text{sobre } Y = \zeta(X), \tag{3}$$
$$\phi_Y = 0 \qquad \text{sobre } Y = -1, \tag{4}$$
$$\zeta(X) \to 0 \qquad \text{quando } X \to \pm\infty, \tag{5}$$

onde ϕ é o potencial de velocidade e ψ é sua função harmônica conjugada, Ω denota o negativo da vorticidade, F é o número de Froude e B é a constante de Bernoulli.

A técnica empregada para resolver o sistema (1)-(5) é a aplicação conforme [2]. Para isso, considera-se a aplicação

$$Z(\xi,\eta) = X(\xi,\eta) + iY(\xi,\eta), \tag{6}$$

que leva a região retangular $\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2;\ -L/2 \le \xi \le L/2 \text{ e } -D \le \eta \le 0\}$ no domínio físico $\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2, -L/2 \le X \le L/2, \text{ e } -1 \le Y \le \zeta(X)\}$. Essa transformação pode ser resolvida de maneira exata, o que permite transformar as condições de fronteira livre (2)-(3) na única equação:

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2\mathbf{J}} + \mathbf{Y} + \frac{(\mathcal{C}[(\Omega\mathbf{Y}+F)\mathbf{Y}_\xi])^2}{2\mathbf{J}} - \frac{\mathcal{C}[(\Omega\mathbf{Y}+F)\mathbf{Y}_\xi]}{\mathbf{J}}(c - (\Omega\mathbf{Y}+F)\mathbf{X}_\xi) - \frac{(\Omega\mathbf{Y}+F)^2\mathbf{Y}_\xi^2}{2\mathbf{J}} \\ -\frac{c(\Omega\mathbf{Y}+F)\mathbf{X}_\xi}{\mathbf{J}} + Fc + \Omega\left(\frac{\Omega\mathbf{Y}}{2} + F\right)\mathbf{Y} + \Omega\Big\langle c\mathbf{Y} - \left(\Omega\frac{\mathbf{Y}^2}{2} + F\mathbf{Y}\right)\Big\rangle = B, \end{aligned} \tag{7}$$

onde as letras em negrito se referem as funções do mapeamento conforme (6) avaliadas sobre $\eta = 0$, $< \cdot >$ denota a média de uma função na variável ξ, $\mathbf{J}$ é o determinante da jacobiana do mapeamento

[1]eduardomdecastro@gmail.com
[2]robertoribeiro@ufpr.br
[3]marcelo.flamarion@ufrpe.br

conforme. Além disso, $\mathcal{C}$ é um operador da forma $\mathcal{F}^{-1} i \coth(kD)\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier periódica e $\mathbf{X}_\xi = 1 - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi]$.

A equação (7) é discretizada em uma malha uniforme $\xi_j = -L/2 + (j-1)(L/N)$, $j = 1, \cdots N$. Impõe-se que a onda de superfície livre seja simétrica com relação a origem, para isso considera-se que $Y_j = Y_{N-j+2}$, onde $Y_j = \mathbf{Y}(\xi_j)$. Isto resulta em um sistema com $N/2+1$ equações e $N/2+4$ incógnitas: $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N/2+1}, c, D, B$. Adicionalmente, exige-se que

$$< \mathbf{Y} > +1 = D, \quad \mathbf{Y}(-L/2) = 0 \text{ e } \mathbf{Y}(0) = A.$$

Assim, obtém-se um sistema fechado de $N/2+4$ equações e $N/2+4$ incógnitas. O sistema é resolvido usando o método de Newton, onde as derivadas em ξ são calculadas através da transformada rápida de Fourier (FFT) [3]. Fixado uma amplitude A, são realizadas continuações nos parâmetros de vorticidade e amplitude da solução da equação de Korteweg-de Vries (KdV). Mais especificamente, a ideia de continuação consiste em utilizar a solução convergida como novo chute inicial para o método de Newton. O esquema numérico proposto foi implementado na linguagem MATLAB.

A Figura 1 mostra alguns perfis de ondas construídos para diferentes valores de vorticidade. Conforme pode ser observado, para Ω negativo tem-se um perfil mais arredondado, enquanto que para Ω positivo encontra-se um perfil mais "afiado" em torno da crista. O que está de acordo com resultados previamente publicados na literatura [1].

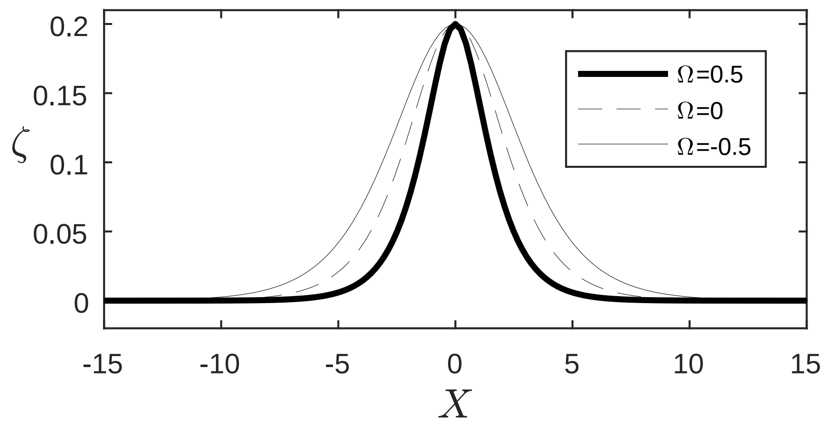

Figura 1: Perfis de ondas para diferentes valores de Ω e amplitude fixada $A = 0.2$. Parâmetros: $L = 1500$ e $N = 2^{13}$. Fonte: autoria própria.

Referências

[1] M. V. Flamarion, P. A. Milewski e A. Nachbin. "Rotational waves generated by current-topography interaction". Em: **Studies in Applied Mathematics** 142 (2019), pp. 433–464. DOI: 10.1111/sapm.12253.

[2] R. Ribeiro Jr., P. A. Milewski e A. Nachbin. "Flow structure beneath rotational water waves with stagnation points." Em: **Journal of Fluid Mechanics** 812 (2017), pp. 792–814. DOI: 10.1017/jfm.2016.820.

[3] L. N. Trefethen. **Spectral Methods in MATLAB.** 1st. ed. Philadelphia: SIAM, 2001. ISBN: 9780898714654.