

Análise do Algoritmo CMPN em regime permanente

Eduardo Santos de Oliveira,¹ Diego Barreto Haddad²

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O algoritmo adaptativo de norma ℓ_p continuamente mista apresenta por vantagens tanto a robustez a ruído impulsivo quanto a implementação automática de uma estratégia de passo de aprendizagem variante no tempo. Devido à extrema não-linearidade envolvida na equação de atualização do algoritmo, até o presente momento não há um modelo estocástico disponível na literatura capaz de prever seu desempenho assintótico. Este artigo desenvolve um modelo estocástico inédito, baseado em argumentos de conservação de energia e de uma aproximação por uma função linear por partes, que dá origem a uma equação analítica em ponto fixo, cuja solução permite estimar o desempenho em regime permanente deste importante algoritmo.

Palavras-chave. Filtragem Adaptativa, Análise em Regime Permanente, Norma Mista, Algoritmo CMPN

1 Introdução

A filtragem adaptativa consiste numa área do processamento digital de sinais bastante flexível, possuindo como potenciais aplicações o cancelamento de eco, eliminação de ruído, identificação de sistemas, equalização de canal, controle, predição de sinais, entre outros. Este processamento é realizado através de estruturas chamadas de filtros (em geral com resposta ao impulso finita, quando lineares), que permitem tanto a extração quanto a manipulação de informações de interesse [3].

O desempenho de algoritmos de filtragem adaptativa é negativamente influenciado pela presença ubíqua de sinais de ruído, entre os quais os de natureza impulsiva são particularmente danosos ao desempenho de diversos algoritmos adaptativos clássicos, fundamentados em funções custo quadráticas, o que tem demandado da comunidade científica um projeto judicioso de algoritmos adaptativos *robustos ao ruído impulsivo* [6].

Neste contexto, a referência [7] introduziu um novo algoritmo, conhecido como algoritmo de norma mista contínua (CMPN, do inglês *Continuous Mixed p -Norm Adaptive Algorithm*). A supracitada referência já conta com mais de 50 citações³, o que sinaliza o interesse por ela despertado na comunidade científica. Cabe notar que o cálculo da norma ℓ_p mista contínua é modulado pela adoção de uma função densidade de probabilidade ao arbítrio do projetista. A equação de atualização do algoritmo apresenta uma não linearidade bastante expressiva, o que tem dificultado a obtenção de modelos capazes de prever o desempenho do CMPN. Tais modelos são bastante valorizados na literatura, já que são capazes de prover ao projetista garantias formais de desempenho na prática.

Neste artigo, uma equação analítica de ponto fixo é derivada de um modelo estocástico baseado na técnica de análise conhecida como balanceamento de energia [4]. A solução desta equação permite estimar, pela primeira vez na literatura, o desempenho assintótico do algoritmo CMPN.

¹eduardoeso2013@gmail.com

²diego.haddad@cefet-rj.br

³Na base de artigos do IEEE. Consulta efetuada em março de 2022.

2 Algoritmos de norma mista

Um das primeiras referências de algoritmos adaptativos de norma mista é [2], a qual combinou as normas de segunda e quarta potências, respectivamente adotadas pelos algoritmos LMS e LMF (*Least Mean Fourth*).

Em [1], um novo algoritmo é proposto, o RMN (*Robust Mixed-norm*), que combina o LMS com LAD (*Least Absolute Difference*), ou mínima diferença absoluta, com a vantagem de ser robusto em cenários de identificação de sistemas em que o sinal desejado seja corrompido por ruído impulsivo.

O algoritmo CMPN efetua uma mistura entre as normas, fato que justifica o termo *mixed-norm* no nome do algoritmo. A proposta deste algoritmo, segundo seu autor [7], é ser robusto contra ruído impulsivo, generalizando a ideia do algoritmo RMN. O algoritmo CMPN propõe como função custo

$$G_{\text{CMPN}}(k) = \int_1^2 \lambda_k(p) |e(k)|^p dp, \quad (1)$$

com $\lambda_k(p)$ denotando uma função densidade de probabilidade ao arbítrio do projetista e $e(k) \in \mathbb{R}$ denotando o sinal de erro na k -ésima iteração, calculado via

$$e(k) \triangleq d(k) - y(k), \quad (2)$$

onde $d(k) \in \mathbb{R}$ é um sinal de referência (que cumpre ao filtro adaptativo estimar) e $y(k) \in \mathbb{R}$ denota a saída do filtro na k -ésima iteração:

$$y(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (3)$$

onde $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^N$ denota o vetor de coeficientes adaptativos⁴ e $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^N$ contém N amostras consecutivas do sinal de entrada:

$$\mathbf{x}(k) = [x(k) \quad x(k-1) \quad x(k-2) \quad \dots \quad x(k-N+1)]^T. \quad (4)$$

Utilizando a técnica do gradiente estocástico aplicado em (1) temos que

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \mathbf{w}_i(k)} = \int_1^2 \lambda_k(p) \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_i(k)} |e(k)|^p dp. \quad (5)$$

Assumindo, na ausência de informação *a priori*, que a função densidade de probabilidade $\lambda_k(p)$ seja uniforme no intervalo [1,2], a partir da Equação (5), obtém-se a equação de atualização do CMPN:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta \gamma_k \text{sign}[e(k)]\mathbf{x}(k), \quad (6)$$

sendo γ_k determinado pela equação:

$$\gamma(k) = \frac{(2|e(k)| - 1) \ln(|e(k)|) - |e(k)| + 1}{\log^2(|e(k)|)}. \quad (7)$$

Para propósitos da análise, a Equação (6) pode ser mais conveniente descrita por

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta \mathbf{x}(k) f[e(k)], \quad (8)$$

com a função $f[e(k)]$ sendo dada por:

$$f[e(k)] = \frac{[(2|e(k)| - 1) \ln(|e(k)|) - |e(k)| + 1] \text{sign}[e(k)]}{\log^2(|e(k)|)}. \quad (9)$$

⁴Todos os vetores neste artigo são do tipo coluna

Doravante, será assumido um contexto de identificação de sistemas, no qual o vetor ótimo a identificar é denotado por $\mathbf{w}^* \in \mathbb{R}^N$ e o sinal de referência respeita o modelo de regressão linear:

$$d(k) = [\mathbf{w}^*]^T \mathbf{x}(k) + \nu(k), \quad (10)$$

onde $\nu(k) \in \mathbb{R}$ denota um sinal de ruído, costumeiramente associado a imperfeições na medição.

3 Análise de Regime Permanente do Algoritmo CMPN

Definamos o erro *a priori* sem ruído ponderado como

$$e_a^\Sigma(k) \triangleq \mathbf{x}^T(k) \Sigma \tilde{\mathbf{w}}(k), \quad (11)$$

onde Σ é uma matriz simétrica positiva definida qualquer e $\tilde{\mathbf{w}}(k) \in \mathbb{R}^N$ denota o *vetor de desvio* entre a solução ótima e a solução adaptativa atual (isto é, $\tilde{\mathbf{w}}(k) \triangleq \mathbf{w}^* - \mathbf{w}(k)$). Particularmente, assumindo $\Sigma = \mathbf{I}$, definimos:

$$e_a(k) \triangleq e_a^{\mathbf{I}}(k) = \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{w}}(k). \quad (12)$$

Por outro lado, os erros definidos *após* a atualização são conhecidos como erros *a posteriori*

$$e_p^\Sigma(k) \triangleq \mathbf{x}^T(k) \Sigma \tilde{\mathbf{w}}(k+1) = \tilde{\mathbf{w}}^T(k+1) \Sigma \mathbf{x}(k), \quad (13)$$

$$e_p^{\mathbf{I}}(k) = e_p(k) \triangleq \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{w}}(k+1). \quad (14)$$

Existe uma relação entre o erro $e(k)$ e o erro *a priori* $e_a(k)$, já que

$$e(k) = d(k) - y(k) = [\mathbf{w}^*]^T \mathbf{x}(k) + \nu(k) - \mathbf{w}^T(k) \mathbf{x}(k) = e_a(k) + \nu(k), \quad (15)$$

e assumindo-se que o ruído $\nu(k)$ é estatisticamente independente das demais variáveis temos

$$\text{MSE}(k) = \mathbb{E} [e^2(k)] = \mathbb{E} [e_a^2(k)] + \sigma_\nu^2, \quad (16)$$

o que significa que a predição do valor esperado de $e_a^2(k)$ nos permite quantificar o MSE (o erro quadrático médio, do inglês *mean square error*).

A partir de (8), podemos deduzir

$$\tilde{\mathbf{w}}(k+1) = \tilde{\mathbf{w}}(k) - \beta f[e(k)] \mathbf{x}(k). \quad (17)$$

Multiplicando ambos os lados de (17) à esquerda por $\mathbf{x}^T(k) \Sigma$, encontramos:

$$\underbrace{\mathbf{x}^T(k) \Sigma \tilde{\mathbf{w}}(k+1)}_{=e_p^\Sigma(k)} = \underbrace{\mathbf{x}^T(k) \Sigma \tilde{\mathbf{w}}(k)}_{=e_a^\Sigma(k)} - \beta f[e(k)] \underbrace{\mathbf{x}^T(k) \Sigma \mathbf{x}(k)}_{\|\mathbf{x}(k)\|_\Sigma^2}, \quad (18)$$

de modo que os erros *a priori* e *a posteriori* são relacionados pela identidade seguinte

$$\beta f[e(k)] = \frac{e_a^\Sigma(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_\Sigma^2} - \frac{e_p^\Sigma(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_\Sigma^2}. \quad (19)$$

Aplicando (19) em (17), temos:

$$\tilde{\mathbf{w}}(k+1) + \frac{e_a^\Sigma(k) \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_\Sigma^2} = \tilde{\mathbf{w}}(k) + \frac{e_p^\Sigma(k) \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_\Sigma^2}. \quad (20)$$

Seja a energia *ponderada* por Σ de um vetor z definida por $\|z\|_{\Sigma}^2 \triangleq z^T \Sigma z$. Calculando as energias ponderadas dos lados esquerdo e direito de (20) e igualando-as, obtemos, após algumas manipulações:

$$\|\tilde{w}(k+1)\|_{\Sigma}^2 + \frac{[e_a^{\Sigma}(k)]^2}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2} = \|\tilde{w}(k)\|_{\Sigma}^2 + \frac{[e_p^{\Sigma}(k)]^2}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2}, \tag{21}$$

$$e_p^{\Sigma}(k) = e_a^{\Sigma}(k) - \beta f[e(k)] \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2, \tag{22}$$

$$[e_p^{\Sigma}(k)]^2 = [e_a^{\Sigma}(k)]^2 - 2\beta f[e(k)] e_a^{\Sigma}(k) \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2 + \beta^2 f^2[e(k)] \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^4. \tag{23}$$

A aplicação de (23) em (21) leva a

$$\|\tilde{w}(k+1)\|_{\Sigma}^2 = \|\tilde{w}(k)\|_{\Sigma}^2 - 2\beta f[e(k)] e_a^{\Sigma}(k) \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2 + \beta^2 f^2[e(k)] \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^4, \tag{24}$$

a qual é uma equação exata, aplicável a todas as iterações do algoritmo. Ao aplicarmos o operador de valor esperado obtemos:

$$\mathbb{E} [\|\tilde{w}(k+1)\|_{\Sigma}^2] = \mathbb{E} [\|\tilde{w}(k)\|_{\Sigma}^2] - 2\beta \underbrace{\mathbb{E} \{ e_a^{\Sigma}(k) f[e(k)] \}}_{=\textcircled{I}} + \beta^2 \underbrace{\mathbb{E} \{ \|\mathbf{x}(k)\|_{\Sigma}^2 f^2[e(k)] \}}_{=\textcircled{II}}. \tag{25}$$

Devido à extrema não linearidade da função $f[e(k)]$ (verificável em (9)), os cálculos de \textcircled{I} e \textcircled{II} não apresentam solução analítica. Esta, acreditamos, é uma das razões pela qual o algoritmo CPN não foi ainda modelado teoricamente na literatura correlata. Para contornar este problema, neste trabalho propomos aproximar a função $f[e(k)]$ por uma versão não linear mais simples, a qual apresenta a propriedade de ser *linear por partes*. Assim, propomos a seguinte aproximação:

$$f[e(k)] \approx \begin{cases} 0, & \text{se } e(k) = 0 \\ b_0 + a_0 e(k), & \text{se } 0 < e(k) \leq \delta_1 \\ b_1 + a_1 e(k), & \text{se } \delta_1 < e(k) \\ -b_0 + a_0 e(k), & \text{se } -\delta_1 \leq e(k) < 0 \\ -b_1 + a_1 e(k), & \text{se } e(k) < -\delta_1 \end{cases}, \tag{26}$$

e $f[e(k)] = -f[-e(k)]$ se $e(k) < 0$.

Devemos garantir que a aproximação é contínua no ponto $e(k) = \delta_1$. Matematicamente, tal restrição implica

$$b_1 + a_1 \delta_1 = b_0 + a_0 \delta_1 \Rightarrow b_1 = b_0 + a_0 \delta_1 - a_1 \delta_1, \tag{27}$$

significando que basta calcular por *least-squares* (LS) o valor de a_1 e depois obter b_1 a partir (27).

No caso de a_1 , temos que

$$a_1 e(k) + b_1 = f[e(k)]. \tag{28}$$

Usando (27), temos

$$a_1 e(k) + b_0 + a_0 \delta_1 - a_1 \delta_1 = f[e(k)], \tag{29}$$

de modo que, assumindo que δ_1 , b_0 e a_0 já foram encontrados via LS, a_1 deve minimizar a energia do resíduo do seguinte sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e(k_{\overline{N}+1}) - \delta_1 \\ e(k_{\overline{N}+2}) - \delta_1 \\ \vdots \\ e(k_L) - \delta_1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} a_1 \approx \underbrace{\begin{bmatrix} f[e(k_{\overline{N}+1})] - b_0 - a_0 \delta_1 \\ f[e(k_{\overline{N}+2})] - b_0 - a_0 \delta_1 \\ \vdots \\ f[e(k_L)] - b_0 - a_0 \delta_1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{y}}, \tag{30}$$

de modo que a solução LS de (30) é $a_1 = \frac{\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}}$.

No caso da aproximação (26), o termo $h_G[\xi]$ conforme [4], onde $\xi \triangleq \mathbb{E}[e_a^2(k)]$, é expresso por

$$h_G[\xi] = \frac{\mathbb{E}\{e_a(k)f[e_a(k) + \nu(k)]\}}{\xi}, \quad (31)$$

cujos numerador pode ser encontrado assumindo-se uma distribuição genérica $p_\nu(\nu)$ para o ruído $\nu(k)$, a partir de

$$\mathbb{E}\{e_a(k)f[e_a(k) + \nu(k)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_a f[e_a + \nu] \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \exp\left[-\frac{e_a^2}{2\xi}\right] p_\nu(\nu) de_a d\nu, \quad (32)$$

onde a distribuição de $e_a(k)$ é suposta gaussiana. Logo, os termos $\textcircled{\text{I}}$ e $\textcircled{\text{II}}$ em (25) passam a ser calculados analiticamente, viabilizando, pela primeira vez na literatura, uma estimativa teórica do desempenho assintótico do algoritmo CMPN.

Utilizando o Teorema de Price [5], o termo $\textcircled{\text{I}}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} &= \mathbb{E}\{e_a^\Sigma(k)f[e(k)]\} = \mathbb{E}\{e_a^\Sigma(k)e_a(k)\} \frac{\mathbb{E}\{e_a(k)f[e_a(k) + \nu(k)]\}}{\mathbb{E}[e_a^2(k)]} \\ &= \mathbb{E}\{e_a^\Sigma(k)e_a(k)\} h_G\{\mathbb{E}[e_a^2(k)]\} = \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)] h_G\{\mathbb{E}[e_a^2(k)]\}, \end{aligned} \quad (33)$$

enquanto que a aplicação do Teorema de Price no termo $\textcircled{\text{II}}$ dá origem a

$$\textcircled{\text{II}} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{x}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 f^2[e(k)]\} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{x}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2\} h_U\{\mathbb{E}[e_a^2(k)]\}.$$

A aplicação de (33) e de (34) em (25) leva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k+1)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2] &= \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2] - 2\beta \mathbb{E}\left[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)}^2\right] h_G\{\mathbb{E}[e_a^2(k)]\} \\ &\quad + \beta^2 \mathbb{E}\{\|\mathbf{x}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2\} h_U\{\mathbb{E}[e_a^2(k)]\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Agregando-se a hipótese da independência em (34), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k+1)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2] &= \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2] - 2\beta h_G\{\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]\} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R}}^2] \\ &\quad + \beta^2 \mathbb{E}\{\|\mathbf{x}(k)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2\} h_U\{\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_{\mathbf{R}}^2]\}, \end{aligned} \quad (35)$$

onde $\mathbf{R} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]$ denota a matriz de autocorrelação do sinal de entrada $x(k)$. Assumindo que este sinal é branco, temos, fazendo $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = \sigma_x^2 \mathbf{I}$ (onde σ_x^2 denota a variância de x):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k+1)\|^2] &= \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2] - 2\beta \sigma_x^2 h_G\{\sigma_x^2 \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]\} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2] \\ &\quad + \beta^2 \sigma_x^2 N h_U\{\sigma_x^2 \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Já que estamos interessados no regime assintótico, assumindo que o algoritmo converge, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k+1)\|^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]. \quad (37)$$

E por conseguinte (36) dá origem a

$$\sigma_x^2 h_G\{\sigma_x^2 \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]\} \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2] = \frac{\beta}{2} \sigma_x^2 N h_U\{\sigma_x^2 \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2]\}. \quad (38)$$

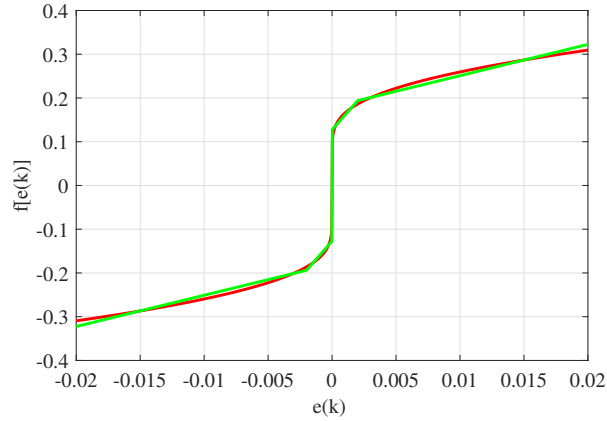


Figura 1: Aproximação linear por partes da função custo $f[e(k)]$ do algoritmo CMPN

Fazendo $\xi \triangleq \sigma_x^2 \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|^2] = \mathbb{E}[e_a^2(k)]$, temos o seguinte resultado:

$$\xi = \frac{\beta}{2} \text{Tr}[\mathbf{R}] \frac{h_U[\xi]}{h_G[\xi]}. \quad (39)$$

A Equação (39) é a principal contribuição deste trabalho. Ela prediz que o valor assintótico do erro quadrático médio em excesso $\mathbb{E}[e_a^2(k)]$ (suficiente para estimar o MSE assintótico, segundo (16)) é a solução de uma equação de ponto fixo (descrita por (39)). Uma equação de ponto fixo pode ser resolvida iterativamente de maneira bastante simples, calculando-se, a partir de uma estimativa inicial ξ_0 , um novo valor refinado

$$\xi_1 = \frac{\beta}{2} \text{Tr}[\mathbf{R}] \frac{h_U[\xi_0]}{h_G[\xi_0]}, \quad (40)$$

e refinando o resultado sucessivamente, segundo

$$\xi_{n+1} = \frac{\beta}{2} \text{Tr}[\mathbf{R}] \frac{h_U[\xi_n]}{h_G[\xi_n]}, \quad (41)$$

até que a diferença $|\xi_{n+1} - \xi_n|$ seja desprezível.

4 Resultados

Os resultados alcançados neste trabalho foram obtidos confrontando experimentos teóricos com empíricos através de diversas simulações de Monte Carlo, possibilitado pela função de transferência (39), que relaciona indiretamente $e(k)$ e $d(k)$. Foram considerados sinais gaussianos, $N = 10$, variância do ruído (branco e gaussiano) $\sigma_v^2 = 10^{-6}$, 10^6 amostras até a convergência e β , o fator de aprendizagem arbitrável pelo projetista, assumindo valores ao longo de diversas décadas (isto é, $\beta \in \{10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}\}$). Para efeito do cálculo das integrais, foram considerados os valores para as constantes em (26) $a_0 = 33.2974$, $a_1 = 7.1362$, $b_0 = 0.1273$, $b_1 = 0.1796$, $\delta_1 = 0.002$.

De acordo com a Figura (2), podemos analisar a evolução do MSE em regime permanente perante os valores de β , considerando ambos experimentos teóricos e empíricos. Percebe-se que ao trabalhar com valores de β menores tem-se maior acurácia nas predições. Isto é compatível com o fato de que a hipótese da independência, mobilizada pela análise proposta, ser mais acurada quando o fator de aprendizagem apresenta valores relativamente pequenos. Porém, mesmo com o aumento de β , a estimativa teórica ainda apresenta bastante aderência com o resultado de simulação.

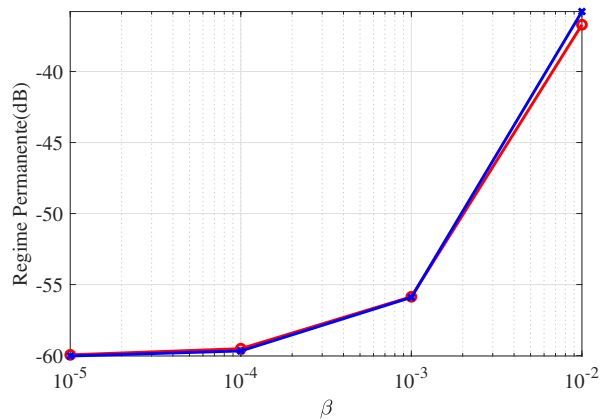


Figura 2: Evolução do MSE em regime permanente do algoritmo CMPN para $\beta \in \{10^{-5}, 10^{-2}\}$. Curva azul: resultado de simulações. Curva vermelha: predições teóricas.

5 Conclusões

Este trabalho apresentou uma metodologia capaz de contornar uma restrição, essencialmente matemática, normalmente encontrada na análise estocástica do algoritmo CMPN. A metodologia aproximou a não linearidade por uma função não linear que apresenta uma característica de ser linear por partes. Afortunadamente, tornou-se viável, desta forma, analisar em regime permanente o algoritmo CMPN com alto grau de assertividade.

Como trabalho futuro, pretendemos investigar a análise no transiente do algoritmo CMPN, bem como a análise de *tracking* (rastreamento), a qual é necessária para prover garantias de desempenho ao projetista quando a função de transferência a identificar é variante no tempo.

Referências

- [1] J.A. Chambers e A. Avlonitis. “A Robust Mixed-Norm Adaptive Filter Algorithm”. Em: **IEEE Signal Processing Letters** (1997). Aceito. DOI: 10.1109/97.554469.
- [2] J.A. Chambers, O. Tanrikulu e A.G Constantinides. “Least mean mixed-norm adaptive filtering”. Em: **Electronic Letters** 30 (1994), pp. 1574–1575. DOI: 10.1049/e1:19941060.
- [3] P.S.R. Diniz. **Adaptive Filtering. Algorithms and Practical Implementation**. 3a. ed. New York: Springer Science Business Media, 2008. ISBN: 978-0-387-31274-3.
- [4] T.Y. Al-Naffouri e A.H. Sayed. “Transient Analysis of Adaptive Filters with Error Nonlinearities”. Em: **IEEE Transactions on Signal Processing** 51.3 (mar. de 2003).
- [5] A. Papoulis. **Probability, random variables, and stochastic processes**. 4a. ed. New York: McGraw-Hill, 2002. ISBN: 0-07-112256-7.
- [6] L. Shi e Y. Lin. “Convex Combination of Adaptive Filters under the Maximum Correntropy Criterion in Impulsive Interference”. Em: **IEEE Signal Processing Letters** 21.11 (2014), pp. 1385–1388. DOI: 10.1109/LSP.2014.2337899.
- [7] H. Zayyani. “Continuous Mixed p-Norm Adaptive Algorithm for System Identification”. Em: **IEEE Signal Processing Letters** 21 (2014), pp. 1108–1110. DOI: 10.1109/lsp.2014.2325495.