

Solução Analítica para o Escoamento Poiseuille Planar com Escorregamento

Isabella Lopes Corrêa,¹ Gilcilene Sanchez de Paulo²
Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP, Presidente Prudente - SP
Caroline Viezel³
Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC, Garopaba - SC

Resumo. Neste trabalho, o desenvolvimento de soluções analíticas para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento na parede no estado estacionário de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano são consideradas. O modelo de fluido não-Newtoniano utilizado é descrito pela Lei das Potências. O perfil de velocidade com diferentes parâmetros de deslizamento é implementado e gerado no *software* PythonTM.

Palavras-chave. Solução Analítica, Fluidos Newtoniano e não-Newtoniano, Lei das Potências, Escorregamento.

1 Introdução

Considere o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido representado na Figura 1. Assuma que o deslizamento do fluido ocorre adjacentes às duas placas paralelas do canal, de acordo com a lei de escorregamento dada por

$$\tau_w = \beta u_w \text{ em } y = H, \quad (1)$$

onde β é o parâmetro de deslizamento do material, τ_w é a tensão de cisalhamento exercida pelo fluido na parede, descrita por

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H}, \quad (2)$$

e u_w é a velocidade de deslizamento.

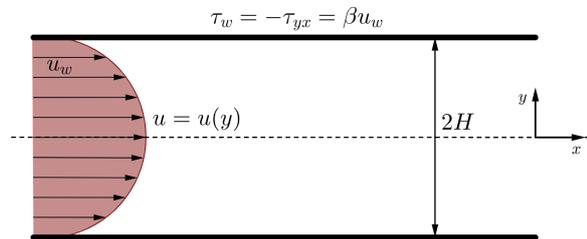


Figura 1: Escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

¹isabella.lopes@unesp.br

²gilcilene.sanchez@unesp.br

³caroline.viezel@ifsc.edu.br

2 Modelagem Matemática

A modelagem de um escoamento transiente e isotérmico como o representado na Figura 1, com os fluidos Newtoniano e não-Newtoniano, neste último caso, utilizando o modelo Lei das Potências, é apresentada a seguir.

2.1 Fluido Newtoniano

As equações da continuidade (3) e da quantidade de movimento em relação a x e y , (4) e (5), respectivamente, modelam escoamentos incompressíveis e isotérmicos de fluidos Newtonianos em coordenadas Cartesianas bidimensionais,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho f_x, \quad (4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho f_y, \quad (5)$$

onde, ρ é a densidade do fluido, t o tempo, u e v as componentes da velocidade em relação a x e y , respectivamente, η_s a viscosidade do fluido que é constante e f_x , f_y as componentes de algum campo de força, como gravitacional, magnético ou eletromagnético em relação a x e y , respectivamente.

2.2 Fluido não-Newtoniano

No caso de um fluido Newtoniano, η_s é sempre constante. Por outro lado, nos casos em que a viscosidade do fluido sofre alteração com a variação da taxa de cisalhamento, temperatura ou pressão, podemos tratá-los como um escoamento de Fluidos Newtonianos Generalizados. Esta classe de fluidos é classificada como fluido não-Newtoniano.

Neste trabalho, será considerada a variação da viscosidade η com a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$. Os modelos Lei das Potências, Carreau e Casson expressam as variações da viscosidade em função da taxa de cisalhamento [1, 2]. No contexto deste trabalho, o modelo escolhido é o da Lei das Potências, onde a viscosidade é expressa por

$$\eta(\dot{\gamma}) = m \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (6)$$

sendo m e n constantes positivas conhecidas, respectivamente, como consistência e índice da Lei das Potências.

Note que, quando $n = 1$, a equação (6) reduz-se ao modelo de fluido Newtoniano,

$$\eta = m \dot{\gamma}^{1-1} \Rightarrow \eta = m \dot{\gamma}^0 \Rightarrow \eta = m \quad (7)$$

uma vez que a viscosidade torna-se constante.

Por outro lado, quando $n < 1$, a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento, configurando um fluido reofluídificante. E, se $n > 1$, a viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento, sendo classificado como fluido dilatante.

Portanto, a partir do modelo da Lei das Potências, as equações da quantidade de movimento em relação a x e y , respectivamente, são descritas por:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho f_x, \quad (8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho f_y. \quad (9)$$

A taxa de cisalhamento é dada por

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}. \quad (10)$$

3 Desenvolvimento e Resultados

A partir das hipóteses descritas inicialmente para o problema representado pela Figura 1, assume-se que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, pois o escoamento é estacionário e $f_x = 0$; a velocidade é dada por $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), 0)$, pois o escoamento é unidirecional. Desta forma, a equação (3) reduz-se a $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e, portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y) = (u(y), 0)$. A partir das simplificações citadas acima, a equação governante é dada por,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (11)$$

e, como o fluxo é simétrico em relação ao eixo de simetria, as condições de contorno tornam-se

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = 0 \\ \tau_w = -\tau_{yx} = \beta u_w \text{ em } y = H. \end{cases} \quad (12)$$

3.1 Fluido Newtoniano

Integrando a equação (11) duas vezes em relação a y , tem-se

$$u(y) = \frac{1}{2\eta_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2. \quad (13)$$

Da condição em $y = 0$, tem-se $c_1 = 0$. Consequentemente,

$$u(y) = \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_2, \quad (14)$$

com a tensão de cisalhamento dada por,

$$\tau_{yx}(y) = \eta_s \frac{du}{dy} = \eta_s \frac{d \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) \right)}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} y, \quad (15)$$

onde $\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\frac{\partial p}{\partial x} H$.

Para obter a constante c_2 , aplica-se a condição de contorno em $y = H$, e a equação (14) em H

$$\tau_w = \beta u_w \Rightarrow u_w = \frac{1}{\beta} \tau_w \Rightarrow u(H) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H \Rightarrow \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 + c_2 = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H, \quad (16)$$

logo,

$$c_2 = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} \right) \quad (17)$$

e, assim,

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} \right) = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} - y^2 \right). \quad (18)$$

A equação (18) é a solução analítica do escoamento Poiseuille planar com escorregamento no estado estacionário para o caso Newtoniano, e descreve o perfil de velocidade do escoamento. Observe também que esta expressão reduz-se ao perfil do escoamento de Poiseuille sem escorregamento quando $\beta \rightarrow \infty$. Uma vez que a velocidade de escorregamento é inversamente proporcional ao coeficiente de escorregamento β , a condição de não escorregamento é recuperada.

Uma outra forma de escrever o perfil de velocidade é,

$$u(y) = u_w - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2). \quad (19)$$

Obtido o perfil de velocidade analítico, a taxa de fluxo volumétrico por unidade de largura, é fornecida pela expressão,

$$\frac{Q}{W} = 2 \int_0^H u dy = \frac{-2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left(1 + \frac{3\eta_s}{H\beta} \right) \Rightarrow Q = -\frac{2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 + \frac{3\eta_s}{\beta H} W \right). \quad (20)$$

A Figura 2 representa o do perfil de velocidade do escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

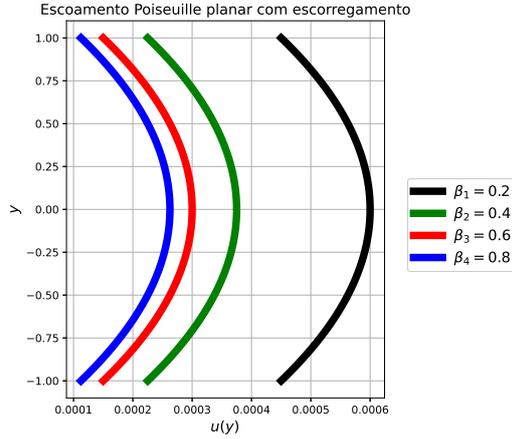


Figura 2: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento para o fluido Newtoniano com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 , $\eta_s = 0.3 \frac{Ns}{m^2}$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.00027 \frac{Pa}{m}$ e amplitude do canal $H = 1m$.

3.2 Fluido não-Newtoniano

A partir das hipóteses apresentadas no início da Seção 3, e aplicadas nas equações (6), (8), (9) e (10), tem-se o seguinte conjunto de equações que modelam o problema,

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}, \\ f_x = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Integra-se a primeira equação do sistema de equações (21) em relação a y ,

$$\int \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) dy = -\frac{\partial p}{\partial x} \int dy \Rightarrow \eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y + c_1, \quad (22)$$

e para obter a constante c_1 , aplica-se a condição de contorno $\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} = 0$ em $y = 0$,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0. \quad (23)$$

Obtida a constante $c_1 = 0$, podemos substituí-la em (22), desta forma,

$$\eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (24)$$

Para aplicar a modelagem da viscosidade η é preciso analisar o comportamento da derivada, como ilustra a Figura 3.

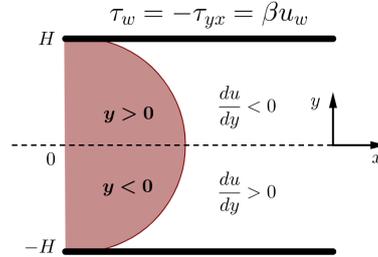


Figura 3: Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

Como o escoamento é simétrico, basta encontrar a solução apenas para $\frac{du}{dy} > 0$, $y < 0$. Substituindo a equação (24) na segunda equação do sistema de equações (21), tem-se

$$m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow m \left(\frac{du}{dy} \right)^n = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow \quad (25)$$

$$\frac{du}{dy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} y \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (26)$$

Integra-se (26) em relação a y , que resulta em

$$u(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n}\right) y^{\frac{1+n}{n}} + c_2, \quad (27)$$

desta forma, pode-se obter a tensão de cisalhamento τ_{yx} , que é dada por,

$$\tau_{yx} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n}\right) \left(\frac{1+n}{n}\right) y^{\frac{1+n}{n}-1} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}, \quad (28)$$

e, conseqüentemente,

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=-H} = -\left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} (-H)^{\frac{1}{n}} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} H\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (29)$$

Por outro lado, para obter a constante c_2 , aplica-se a condição de contorno $\tau_w = \beta u_w \Rightarrow u_w = \frac{1}{\beta} \tau_w$, considerando que $u(-H) = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} H\right)^{\frac{1}{n}}$ e iguala-se a equação (27),

$$c_2 = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\beta} H^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{n}{1+n}\right) (-H)^{\frac{1+n}{n}}\right). \quad (30)$$

A constante c_2 , descrita por (30), é substituída na equação (27), que apresenta a solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento no estado estacionário para o caso não-Newtoniano

$$u(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{n}{1+n}\right) \left(y^{\frac{1+n}{n}} - H^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{\beta} H^{\frac{1}{n}}\right)\right), \quad -H \leq y \leq 0, \quad (31)$$

onde n é tal que a solução seja válida matematicamente.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pela solução analítica (31), é apresentada a seguir na Figura 4.

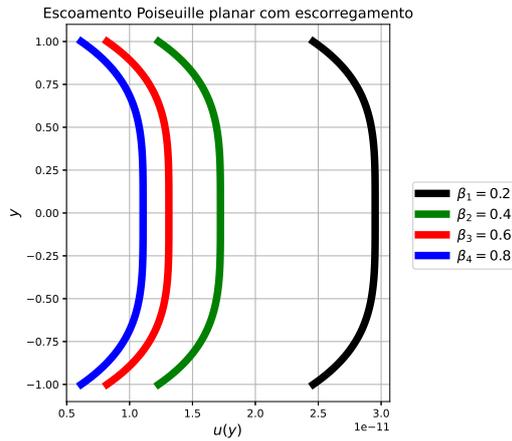


Figura 4: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/2$, $m = 1$ e com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0,00027 \frac{Pa}{m}$ e amplitude do canal $H = 1m$.

4 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento de soluções analíticas para o perfil de velocidade do escoamento Poiseuille planar com escorregamento adjacente às placas paralelas de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Para fluidos não-Newtonianos, foi utilizado o modelo da Lei das Potências descrito pela equação (6). Vale ressaltar que para fluidos modelados pela Lei das Potências, não encontramos na literatura trabalhos que tenham desenvolvido solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento. Obtidas as soluções analíticas, foram apresentados gráficos que demonstram a influência da constante de escorregamento β nos perfis de velocidade nos dois casos considerados: Newtoniano e não-Newtoniano. Verifica-se que a imposição da velocidade de escorregamento na parede, aumenta consideravelmente a velocidade no interior do canal, principalmente quando β aproxima-se de 1, o que indica que o fluido escoou com mais facilidade.

Os perfis de velocidade obtidos das soluções apresentadas neste trabalho podem ser utilizados como condição de contorno para simular numericamente problemas mais complexos como, por exemplo, o escoamento em tubos e canais que apresentam uma contração ou expansão [3]. Além disso, podem auxiliar na verificação de metodologias numéricas que visam resolver problemas que envolvam as equações de Navier-Stokes.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] R.E.S. Bretas. **Reologia De Polímeros Fundidos**. EDUFSCAR - São Carlos, 2000. ISBN: 85.85173-42-4.
- [2] F. Irgens. **Rheology and Non-Newtonian Fluids**. Springer, Cham, 2014. ISBN: 978-3-319-01053-3.
- [3] M.A. Alves J.M. Nóbrega O.R. Carneiro F.T. Pinho L.L. Ferrás A.M. Afonso. “Slip flows of Newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction”. Em: **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 214 (2014), pp. 28–37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.09.007>.