Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Auto-adjunticidade não-linear e leis de conservação da equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov

Priscila L. da Silva e Igor L. Freire
CMCC - Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC,
09210-170, Santo André, SP
E-mail: priscila.silva@ufabc.edu.br
E-mail: igor.freire@ufabc.edu.br,

Resumo: *Neste trabalho apresentaremos condições para que a equação de KdV-ZK seja não-linearmente auto-adjunta e, assim, utilizaremos o Teorema de Ibragimov para encontrar leis de conservação dela.*

Palavras-chave: *Leis de conservação, Teorema de Ibragimov, Teorema de Noether*

1 Introdução

Quando falamos em quantidades conservadas, geralmente estamos pensando em conservação de quantidades como energia, momento

Em meados do século XX, a alemã Emmy Noether mostrou que leis de conservação de equações diferenciais provenientes das equações de Euler-Lagrange são originadas de alguma propriedade de simetria da equação diferencial considerada. Tal resultado é conhecido na literatura como Teorema de Noether.

O Teorema de Noether, todavia, apesar de sua elegância e aplicabilidade, torna-se inutilizável ao considerarmos equações diferenciais que não venham das equações de Euler-Lagrange.

Em 2006, Ibragimov [3] introduziu uma possível generalização do Teorema de Noether para encontrar leis de conservação de equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais, independetemente de serem ou não equações de Euler-Lagrange, removendo, desta maneira, a maior restrição com respeito à aplicabilidade do Teorema de Noether.

Despretenciosamente falando, o que Ibragimov fez foi, a partir de uma equação (aqui restringir-nos-emos a equações, mas poder-se-ia discutir, também, sobre sistemas), construir uma equação auxiliar, chamada equação adjunta. O sistema formado pela equação original e sua adjunta admite sempre uma lagrangeana, que é simples engenhosamente construído à partir da primeira equação. Dessa forma, o sistema está nas condições do Teorema de Noether e, então, pode-se construir, para o sistema, leis de conservação utilizando-se da teoria de Noether.

O grande "problema" em se utilizar o que Ibragimov propôs é que, no ato de construção da equação adjunta-se, surge uma nova variável, não constante na equação original. Tal variável faz-se presente nas leis de conservação construídas, de modo que elas são *leis de conservação não-locais*.

Entretanto, para certas classes de equações diferenciais, é possível transformar as leis de conservação não-locais em locais, veja [2, 3, 4].

Recentemente, em [8], leis de conservação para a equação de Zakharov-Kuznetsov (KZ)

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xyy} = 0, \tag{1}$$

onde $u = u(t, x, y)$ e α, β, γ são constantes reais, foram encontradas utilizando-se dos desenvolvimentos sugeridos por Ibragimov, uma vez que a equação (1) não é proveniente das equações de Euler-Lagrange.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0017

A equação (1) descreve o comportamento de ondas fracas não-lineares íon-acústicas no plasma magnetizado e elétrons isotérmicos na presença de um campo magnético uniforme, e foi deduzida por Zakharov e Kuznetsov em [10]. Para maiores detalhes, veja [5] e referências presentes. A equação (1) é uma generalização da equação de Korteweg-de Vries (KdV).

Neste trabalho consideraremos uma generalização de (1), chamada de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov (KdV-ZK), dada por

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \tag{2}$$

com $u = u(t, x, y, z)$, e estudaremos, via Teorema de Ibragimov, suas leis de conservação.

2 Auto-adjunticidade

Considere uma equação diferencial não-linear

$$F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)}) = 0, \tag{3}$$

onde $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = u(x)$ e $u_{(j)}, 1 \leq j \leq k$ denota as derivadas de u de ordem j.

Em [3, 2], Ibragimov definiu a equação adjunta de F, denotada por F^*, como sendo

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}\mathcal{L},$$

onde $\mathcal{L} = vF$ é chamada de Lagrangeana formal, v é uma nova variável não-local e $\frac{\delta}{\delta u}$ é o operador de Euler-Lagrange dado pela soma formal

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\ldots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u_{i_1}\ldots u_{i_s}}, \tag{4}$$

com

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial}{\partial u} + u_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j} + \ldots.$$

Aqui assumimos a notação de Einstein para índices repetidos.

Exemplo 1. *A equação adjunta da equação é* (2)

$$v_t + \alpha u v_x + v_{xxx} + v_{xyy} + v_{xzz} = 0 \tag{5}$$

pois, denotando $F = u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz}$, *temos que*

$$F^* = -(v_t + \alpha u v_x + v_{xxx} + v_{xyy} + v_{xzz}). \tag{6}$$

Logo, a condição $F^* = 0$ *resulta na equação* (5).

Em [3, 2] Ibragimov propôs a seguinte definição:

Definição 1. *A equação diferencial* (3) *é dita ser estritamente auto-adjunta se existe função* $\lambda = \lambda(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)})$ *tal que*

$$F^*\Big|_{v=u(x)} = \lambda F. \tag{7}$$

A definição anterior pode ser reformulada da seguinte forma: a equação diferencial (3) é dita ser estritamente auto-adjunta se a mudança $v = u$ na equação adjunta se anula identicamente nas soluções u da equação original.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0017

Exemplo 2. *A equação* (2) *é estritamente auto-adjunta, pois, de* (6)*, temos*

$$F^*|_{v=u} = -(u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz}).$$

Dessa forma $F^*|_{v=u}$ *se, e somente se,* $F = 0$.

Pensando em casos de equações que não eram estritamente auto-adjuntas e suas consequências em leis de conservação, Ibragimov em [4] propôs uma nova definição que contemplasse a Definição 1, mas que também englobasse outros casos de equações que não se encaixavam nela.

Definição 2. *A equação diferencial* (3) *é dita ser não-linearmente auto-adjunta se existem funções* $\phi = \phi(x, u)$ *e* $\lambda = \lambda(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)})$ *tais que*

$$F^*\Big|_{v=\phi(x,u)} = \lambda F. \tag{8}$$

A função $\phi(x, u)$ *é chamada substituição.*

Um dos principais resultados deste trabalho pode, agora, ser enunciado:

Teorema 1. *A equação de KdV-ZK*

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0 \tag{9}$$

é não-linearmente auto-adjunta, com substituição dada por

$$\phi(t, x, y, z, u) = a_1(\alpha t u - x) + a_2 u + h(y, z), \tag{10}$$

onde $h(y, z)$ *é uma função arbitrária e* a_1, a_2 *são constantes.*

Este teorema generaliza vários resultados recentes da literatura de equações não-linearmente auto-adjuntas, como mostram os corolários abaixo.

Corolário 1. *A equação de ZK* (1) *é não-linearmente auto-adjunta.*

Demonstração. De fato, a equação (1) pode ser obtida da equação (9) impondo a condição $u_z = 0$. Do ponto de vista da substituição, equivale a requerer independência com respeito a z. Requerindo isso na expressão (10), concluímos que a substituição para a equação (1) é $\phi(t, x, y, u) = a_1(\alpha t u - x) + a_2 u + h(y)$. $\square$

O resultado acima nada mais é que uma prova alternativa para um dos resultados cruciais obtidos em [8].

Corolário 2. *A equação de Korteweg-de Vries*

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0 \tag{11}$$

é não-linearmente auto-adjunta.

Demonstração. Notando que a equação (11) pode ser obtida a partir da equação ($kdvzk$) eliminando a dependência em (y, z), exigindo que a substituição (10) satisfaça $\phi_y = \phi_z = 0$, concluímos que $h(y, z) = a_3$. Dessa forma, a substituição para a equação (11) é $\phi(t, x, u) = a_1(\alpha t u - x) + a_2 u + a_3$. $\square$

Observamos que o Corolário 2 recupera os resultados obtidos em [1] com respeito à equação (11).

Na equação (9), u tem como variáveis espaciais x, y, z. Numa generalização ao Teorema 1, mostraremos que a condição (10) ainda se mantém suficiente, mas neste caso a função h é dada por $h = h(y_1, \ldots, y_n)$, $u = u(t, y)$, onde $y = (x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Neste caso, a equação de KdV-ZK se escreve

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + (\Delta u)_x = 0, \tag{12}$$

em $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde Δ é o Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_n^2}.$$

3 Teorema de Ibragimov e leis de conservação

O famoso Teorema de Noether é uma ferramenta importante para a obtenção de leis de conservação para equações diferenciais com princípios variacionais, isto é, proveniente das equações de Euler-Lagrange via alguma Lagrangeana.

Porém, por exemplo, a conhecida equação KdV (11) não provém das equações de Euler-Lagrange. Assim, o Teorema de Nother é incapaz de encontrar sequer uma lei de conservação. Sabe-se, todavia, que a equação **??** possui infinitas leis de conservação, veja [7, 9].

Tentando generalizar o Teorema de Noether, Ibragimov em [2] propôs o que ele chamou de *"a new conservation theorem"*, chamado de Teorema de Ibragimov em [**?**]. Nesse novo teorema, considerando uma equação diferencial (3), possuindo ela Lagrangeana ou não, leis de conservação não-locais foram encontradas, via Teorema de Noether, para o sistema

$$\begin{cases} F = 0 \\ F^* = 0 \end{cases} . \tag{13}$$

Para utilizar o Teorema de Noether, Ibragimov demonstrou em [3, 2] que as simetrias de Lie

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$$

admitidas por F são herdadas pela sua adjunta F^* e, além disso, a Lagrangeana formal $\mathcal{L} = vF$ é de fato uma Lagrangeana para o sistema (13).

Assim, o vetor de componentes

$$C^i = \xi^i \mathcal{L} + W \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1} \ldots D_{i_s}(W) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{i i_1 \ldots i_s}}, \tag{14}$$

onde $W = \eta - \xi^i u_i$, $i = 1, \ldots, n$, é uma quantidade conservada não-local para o sistema (13).

Entretanto, se a equação diferencial $F = 0$ for não-linearmente auto-adjunta, então conseguimos eliminar a variável não local v fazendo a substituição necessária para que $F = 0$ seja não-linearmente auto-adjunta, veja [4]. Desta forma, o vetor com componentes (14) se torna uma lei de conservação local para a equação $F = 0$.

Neste trabalho, além da classificação sobre auto-adjunticidade não-linear, apresentaremos leis de conservação para a equação KdV-ZK (2) em $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, utilizando o Teorema 1, o Teorema de Ibragimov e resultados obtidos em [5, 6].

4 Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro através dos processos 2011/19089-6 e 2012/22725-4. I. L. Freire agradece ao CNPQ, através do processo n^o 308941/2013-6.

Referências

[1] I. L. Freire and J. C. S. Sampaio, Nonlinear self-adjointness of a generalized fifth-order KdV equation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 45 (2012), 032001.

[2] N. H. Ibragimov, Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians, *J. Math. Anal. Appl.*, 318 (2006) 742–757.

[3] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 333 (2007) 311–328.

[4] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws, *J. Phys. A Math. Theor.*, vol. 44, 8pp., (2011).

[5] B. T. Matebese, A. R. Adem, C. M. Khalique and A. Biswas, Solutions of Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity in (1+3) dimensions, Phys. Wave Phenom., vol. 19, pp. 148-154, (2011).

[6] M. Nadjafikhah and F. Ahangari, Symmetry analysis and similarity reduction of the Korteweg-de Vries-Zakharove-Kuznetsov equation, *Asian-European J. Math.*, 5 (2012) 1250006, 22 páginas.

[7] A. G. Rasin and J. Schiff, Infinitely many conservation laws for the discrete KdV equation, J. Phys. A: Math. Theor., vol. 42, 16 pp., (2009).

[8] R. Tracinà, On the nonlinear self-adjointness of the Zakharov-Kuznetsov equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., vol. 19, pp. 377–382, (2014).

[9] H. Yang and X. Xu, Hamiltonian structure and infinite number of conservation laws for the coupled discrete KdV equations, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B , vol. 19, pp. 374-380, (2004).

[10] V. E; Zakharov and E. A. Kuznetsov, On three-dimensional solitons, Sov. Phys., vol. 39, pp. 285-286, (1974).

