Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Um estudo espectral da matriz A_α envolvendo operações em grafos

Victor Melquiades Xavier Leal[1] Carla Silva Oliveira[2]
ENCE/IBGE, RJ
André Ebling Brondani [3]
UFF, Volta Redonda, RJ

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices. A matriz de adjacência de G, $A(G) = [a_{ij}]$, é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \{v_i, v_j\} \in E \text{ para } v_i,\ v_j \in \ V; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

e a matriz dos graus de G, $D(G)$, é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal correspondem aos graus dos vértices de G. Em 2017, Nikiforov [2] definiu uma combinação linear conexa $A_\alpha(G)$ de $A(G)$ e $D(G)$ da seguinte maneira

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G), \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

O polinômio característico da matriz $A_\alpha(G)$ é definido como sendo $\det(\lambda I - A_\alpha(G))$, e é denotado por $p_{A_\alpha}(\lambda)$; λ é denominado um autovalor de $A_\alpha(G)$ quando λ é uma raiz de $p_{A_\alpha}(\lambda)$. Se $A_\alpha(G)$ possui s autovalores distintos $\lambda_1(A_\alpha(G)) > \ldots > \lambda_s(A_\alpha(G))$ com multiplicidades iguais, respectivamente, a $m(\lambda_1(A_\alpha(G))), \ldots, m(\lambda_s(A_\alpha(G)))$, o espectro de $A_\alpha(G)$, denotado $spect(A_\alpha(G))$, é definido como a matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A_\alpha(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja, escrevemos

$$spect(A_\alpha(G)) = \begin{bmatrix} \lambda_1(A_\alpha(G)) & \cdots & \lambda_s(A_\alpha(G)) \\ m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

Muitas vezes é conveniente alterarmos a estrutura de um grafo para adquirirmos um outro grafo que seja mais útil para o estudo de um determinado tópico. Operações entre grafos constroem novos grafos utilizando as informações provenientes dos grafos originais. Algumas operações apenas alteram a estrutura do grafo original, como a remoção de uma aresta ou de um vértice, enquanto que outras geram conjuntos de vértices e arestas diferentes dos originais. A seguir apresentamos alguns resultados, encontrados na literatura, que investigam o comportamento de alguns invariantes espectrais de $A_\alpha(G)$ após a aplicação de uma determinada operações de grafos.

Definição 0.1. *Dado um grafo $G = (V, E)$, a remoção de uma aresta $e \in E$, fornece o grafo $G - e = (V, E - \{e\})$.*

[1]victormelquiades2020@gmail.com
[2]carla.oliveira@ibge.gov.br
[3]andrebrondani@id.uff.br

Teorema 0.1. *[1] Seja G um grafo de ordem n. Se $e \in E(G)$ e $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, então*

$$\lambda_i(A_\alpha(G-e)) \leq \lambda_i(A_\alpha(G)),$$

para todo i, $1 \leq i \leq n$.

Definição 0.2. *Um vértice de corte em um grafo conexo G é um vértice cuja remoção divide o grafo em, ao menos, duas partes. Seja $G_{n,k}$ o grafo obtido a partir do grafo completo K_{n-k} pela ligação de caminhos, de comprimentos quase todos iguais, a cada vértice do grafo K_{n-k}.*

Teorema 0.2. *[4] Seja G um grafo conexo de ordem n. Se G possui k vértices de corte e $0 \leq \alpha < 1$, então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \lambda_1(A_\alpha(G_{n,k})).$$

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se $G \simeq G_{n,k}$.

O comportamento do espectro de $A_\alpha(G)$ a partir de outras operações em grafos, como o produto cartesiano, o produto lexicografica, o produto direto e o produto forte de grafos foram estudado em [4]. Além disso, encontramos outras investigações deste tipo, por exemplo, em [1], [2] e [3]. Seguindo esta linha, neste trabalho apresentamos um estudo do espectro da matriz A_α de operações em grafos definidas a seguir.

Definição 0.3. *O grafo $F_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ é um grafo que consiste de k ciclos de comprimento impar $2a_1+1$, $2a_2+1$, $\ldots$, $2a_k+1$, respectivamente os quais compartilham um vértice, onde $k \geq 1$ e $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$.*

A Família de grafos apresentada na Definição 0.3 pode ser obtida através da operação de coalecência de vértice. Quando $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, $F_{1,1,\ldots,1}$ é conhecido como *Friendship graph*.

Definição 0.4. *Seja $\vee$ a operação de junção entre grafos. Definimos a família $L_{r,t}$ como sendo os grafos obtidos pela junção entre K_1 e r cópias K_t, ou seja, $L_{r,t} \simeq K_1 \vee rK_t$.*

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo suporte a esta pesquisa.

Referências

[1] H. Lin, X. Huan e J. Shu. "A note on the A_α-spectral radius of graphs". Em: **Linear Algebra and its Applications** 557 (2018), pp. 430–437. DOI: 10.1016/j.laa.2018.08.008.

[2] V. Nikiforov. "Merging the A- and Q-Spectral Theories". Em: **Applicable Analysis and Discrete Mathematics** 11 (2017), pp. 81–107. DOI: 10.2298/AADM1701081N.

[3] V. Nikiforov et al. "On the A_α-spectra of trees". Em: **Linear Algebra and its Applications** 520 (2017), pp. 286–305. DOI: 0.1016/j.laa.2017.01.029.

[4] L. Shuchao e W. Shujing. "The A_α-spectrum of graph product". Em: **Electronic Journal of Linear Algebra** 35 (2019), pp. 473–481. DOI: 10.13001/1081-3810.3857.