

Emprego da Condição de Contorno por Diferenças Finitas para Escoamentos em um Tubo Circular

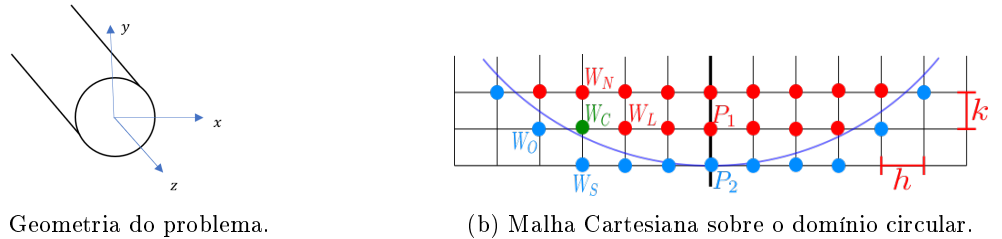
Mateus M. G. Dakuzaku¹, Gilcilene S. de Paulo²

FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Caroline Viezel³

Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC, Garopaba, SC

O presente trabalho resolverá numericamente um escoamento totalmente desenvolvido, ou seja, no estado estacionário, incompressível e isotérmico de um fluido Newtoniano em um tubo (infinitamente longo) de seção transversal circular (Figura 1(a)).



(a) Geometria do problema.

(b) Malha Cartesiana sobre o domínio circular.

Figura 1: Ilustrações dos domínios contínuo e discreto do problema.

Esta modelagem se dá por uma Equação Diferencial Parcial Elíptica, a equação de Poisson (1).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

onde μ é a viscosidade do fluido, $\frac{\partial p}{\partial z}$ é um gradiente de pressão constante e negativo, w é a componente de velocidade na direção do escoamento e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ o domínio. Assume-se que a velocidade na parede do tubo seja nula, ou seja, a condição de contorno de Dirichlet nula $w(x, y) = 0$ sobre a fronteira de Ω , $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

A equação (1) é aproximada pelo método das diferenças finitas centradas de segunda ordem resultando na equação de diferenças (2),

$$-2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) W_C + \frac{1}{h^2} W_O + \frac{1}{h^2} W_L + \frac{1}{k^2} W_S + \frac{1}{k^2} W_N = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2)$$

onde h e k são os espaçamentos da malha Cartesiana (Figura 1(b)) nas direções x e y , respectivamente. W_C , W_O , W_L , W_S , W_N são, respectivamente, os valores aproximados da componente da velocidade nos pontos central (C), oeste (O), leste (L), sul (S) e norte (N), que compõem a célula computacional.

¹mateus.mitsuo@unesp.br, bolsista IC FAPESP Proc. 2022/00403-7

²gilcilene.sanchez@unesp.br

³caroline.viezel@ifsc.edu.br

Como os nós da malha não coincidem com a fronteira, a aplicação da condição de contorno irá requerer um tratamento especial. Para fixar as ideias, seguindo a Figura 1(b), aplicando a equação (2) ao ponto C , os valores da velocidade sobre os pontos O e S que estão fora da circunferência, também serão necessários. Neste trabalho, adota-se o caso de uma extrapolação linear como descrito em [1] para obter expressões para aproximar W_O e W_S em função do valor W_C e de informações da descrição matemática da fronteira $\partial\Omega$.

Desta forma obtêm-se um sistema linear esparsa do tipo $A \cdot W = b$, onde b é um vetor conhecido, W o vetor incógnita e A é a matriz dos coeficientes esparsa, “tipo pentadiagonal”, pois os valores de A associados aos pontos S e N não estão exatamente alinhados pelo fato do número de nós na direção x não ser o mesmo a cada nível na direção y . Este sistema linear $A \cdot W = b$ é resolvido pelo método Jacobi através do PythonTM.

A simulação computacional foi realizada em PythonTM com os seguintes dados de entrada: $h = k = 0,0625 \text{ m}$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -0,1 \text{ Pa/m}$, $\mu = 0,1 \text{ N.s/m}^2$. A solução numérica obtida e a solução analítica são apresentadas na Figura (2) para verificação qualitativa. O contorno da velocidade w , apresentado nas Figuras 2(a) e 2(b), mostra que quanto mais ao centro, maior a velocidade do fluido, o que está coerente com a solução analítica.

A Figura 2(c) apresenta o gráfico de w , tridimensional, onde a superfície em vermelho é a solução analítica e os símbolos azuis representam a solução numérica. A Figura 2(d) mostra um corte na Figura 2(c) em $y = 0$, em que $-1 \leq x \leq 1$. Note que, qualitativamente o comportamento da solução numérica esta condizente com a solução exata.

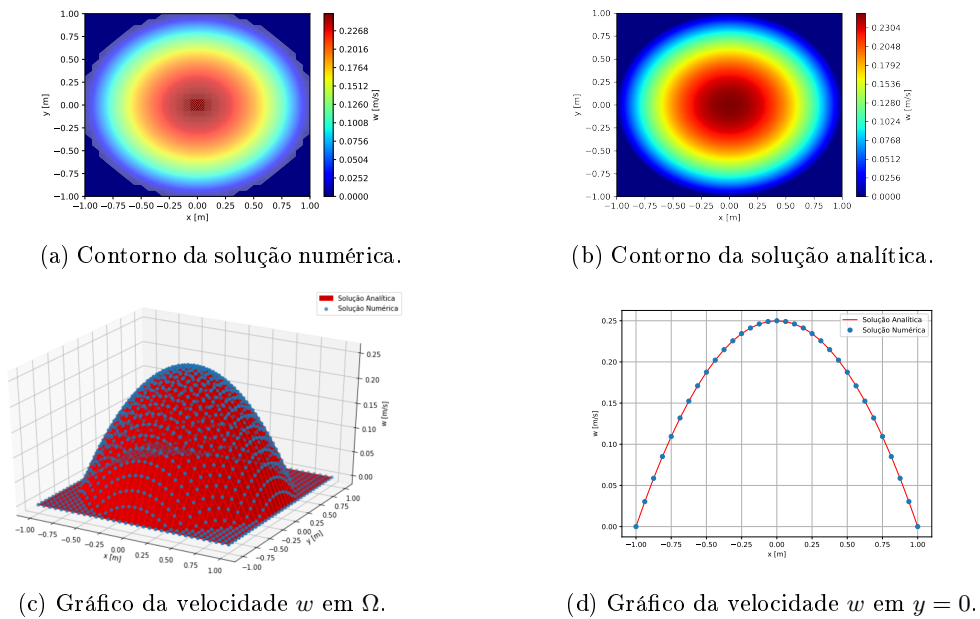


Figura 2: Solução numérica e exata do perfil da velocidade w .

Referências

- [1] J. A. Cuminato e M. Meneguette. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN: 9788583370055.