

O Método das Diferenças Finitas com 9 pontos aplicado a problemas governados pela equação de Poisson

Carlos A. R. Vera Tudela,¹ Alexander G. Amaral²
PPGMMC/UFRRJ, Seropédica, RJ

Resumo. Na pesquisa científica o Método das diferenças Finitas (MDF) é uma técnica numérica amplamente utilizada em todas as áreas das ciências e engenharias. Tradicionalmente, em problemas em 2-D, é utilizado o método com 5 pontos, onde além do nó central são incluídos os nós anterior e posterior na direção horizontal e os nós anterior e posterior na direção vertical de uma malha regular, com espaçamentos iguais entre os nós. Uma variante deste método é o conhecido como MDF com 9 pontos onde são utilizados, além do nó central, os 8 nós ao redor deste nó. Embora este método venha sendo estudado desde o ano 1958 onde aparece a primeira publicação sobre o assunto, se observa na literatura pesquisada que não teve a mesma aceitação quando comparado com o método de 5 pontos. O objetivo deste trabalho é aplicar este método na resolução de problemas governados pela equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet. Dois exemplos numéricos são apresentados e os resultados são comparados com a solução analítica.

Palavras-chave. Método das Diferenças Finitas, MDF com 9 pontos, Equação de Poisson, Métodos Numéricos

1 Introdução

Técnicas numéricas são utilizadas como métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais por décadas. Leonard Euler foi o pioneiro na análise de técnicas numéricas nos primórdios do século 18 quando realizou pesquisas em dinâmica dos fluídos e modelos matemáticos, mas seu trabalho, inicialmente, foi focado na resolução de equações diferenciais ordinárias. Técnicas numéricas para a resolução de equações diferenciais parciais foram desenvolvidas na década de 1930 quando o paper de Courant, Friedrichs e Lewy [5] introduz o Método das Diferenças Finitas como uma forma de resolver equações diferenciais parciais [11].

Embora o desenvolvimento teórico tenha sido contínuo e de forma consistente, o método somente pode ser usado em toda sua potencialidade após o desenvolvimento dos computadores e dos softwares para computadores. Assim, a partir da década de 1960, técnicas numéricas começaram a ser utilizadas tornando-se ferramentas muito importantes na pesquisa nas ciências e engenharias. Segundo Cheng e Cheng [4], o Método das Diferenças Finitas se encontra em segundo lugar quando analisado o número de publicações na base de dados do site Web of Science, atrás do Método dos Elementos Finitos.

O Método da Diferenças Finitas [6] continua sendo objeto de estudo e diversos esquemas de diferenças finitas foram apresentados ao longo dos anos. O clássico de 5 pontos, onde a aproximação das derivadas de primeira e segunda ordem considera, além do nó central, os nós anterior e posterior, e também o nó superior e inferior ou seja considera os quatro nós na vizinhança do nó central. Diversos esquemas de diferenças finitas foram apresentados ao longo dos anos, procurando atender

¹candres@ufrj.br

²agamaa123@gmail.com

as necessidades de contornos irregulares, por exemplo, ou melhorar a acurácia dos resultados ou para atender a aplicações específicas. Este trabalho resgata o esquema compacto de 9 pontos para aplica-lo na equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet.

Em 1996, Charl-Hyun et. al. [3] apresentou uma proposta de esquema de diferenças finitas de 9 pontos para resolver problemas que modelam a equação da onda no domínio da frequência. Este método mostrou ser eficiente ao permitir a redução do número de pontos de malha por comprimento de onda para 4 ou menos, e como consequência, se reduz o uso de memória do computador e tempo de CPU. Mais recentemente, Avendaño, et. al. [1] apresentaram uma proposta para modelar um problema visco-acústico no domínio da frequência utilizando o esquema de 9 pontos. Este trabalho apresenta um esquema de diferenças finitas de 9 pontos para modelar um problema governado pela equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet, considerando malha de tamanho uniforme.

2 O Método das Diferenças Finitas com 5 pontos

As equações diferenciais parciais (EDP) de segunda ordem, lineares, classificadas como elípticas surgem com frequência na modelagem de problemas de equilíbrio, como por exemplo na descrição de transferência de calor em sistemas bidimensionais em estado estacionário, ou em problemas de percolação de água em solo saturado.

Dentre as EDP's elípticas mais importantes, podem se destacar as equações de Laplace e de Poisson. Em um sistema bidimensional, a equação de Poisson é expressa como segue,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad a < x < b \quad , \quad c < y < d, \quad (1)$$

sujeita às seguinte condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(x, c) = g(x, c) \quad , \quad u(x, d) = g(x, d), \\ u(a, y) = g(a, y) \quad , \quad u(b, y) = g(b, y), \end{aligned} \quad (2)$$

quando a parte não homogênea da equação (1) é nula obtêm-se a equação de Laplace [2].

O problema é discretizado através de uma malha de $(n + 2) \times (n + 2)$ pontos no retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Neste trabalho considera-se $\Delta x = \Delta y = h$ que define uma malha bidimensional com espaçamento uniforme. Então, os pontos de malha são dados pela equação (3),

$$(x_i, y_i) = (a + ih, c + jh), \quad i, j = 0, \dots, n + 1. \quad (3)$$

Usando as notações a seguir para a incógnita u , a parte não homogênea f e as condições de contorno g ,

$$u_{ij} = u(x_i, y_j) \quad , \quad f_{ij} = f(x_i, y_j) \quad , \quad g_{ij} = g(x_i, y_j), \quad (4)$$

assim, a aproximação por diferenças finitas para as derivadas parciais de segunda ordem em cada ponto (x_i, y_i) é dada pelas expressões seguinte [2],

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_i), \quad (5)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_i). \quad (6)$$

A seguir, somam-se as equações (5) e (6) obtendo-se a equação final de diferenças finitas de cinco pontos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\varepsilon_i, y_i) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_i). \quad (7)$$

Usando a equação (7) na equação (1), obtêm-se a equação de Poisson final dada pela equação (8) [10],

$$\frac{u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\varepsilon_i, y_i) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_i). \quad (8)$$

3 O Método das Diferenças Finitas com 9 pontos

O Método das Diferenças Finitas com 9 pontos produz aproximações de alta ordem considerando um espaçamento uniforme h nas direções x e y . Essa formulação apresenta uma aproximação de quarta ordem e, portanto, maior precisão nos resultados e maior custo computacional para a obtenção do resultado. O método consiste na combinação linear de dois operadores de 2ª ordem construídos em dois diferentes sistemas de coordenadas rotacionadas [7].

A Equação (9) apresenta a fórmula final do MDF para 9 pontos,

$$\nabla^2 u_{ij} = \frac{1}{6h^2} \left[u_{i-1,j-1} + 4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} - 20u_{i,j} + u_{i+1,j-1} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} \right]. \quad (9)$$

Pode ser verificado que aplicando esta aproximação na solução analítica e fazendo a expansão em séries de Taylor, obtém-se a equação (10)

$$\nabla^2 u(x_i, y_j) = \nabla^2 u + \frac{h^2}{2} \left[u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} \right] + O(h^4). \quad (10)$$

Pode-se observar que a discretização com 9 pontos tem precisão de quarta ordem no espaço [8]. No entanto, observe que o erro dominante é dado pela equação (11)

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \nabla^2(\nabla^2 u). \quad (11)$$

que é, o Laplaciano do Laplaciano:

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \nabla^2(f). \quad (12)$$

A partir da equação (12) observa-se que é possível calcular o erro de truncamento dominante a partir do valor de f sem o conhecimento de u .

4 Exemplos de aplicação

Dois exemplos de aplicação são apresentados para resolução da equação de Poisson em duas dimensões: a primeira com condições de contorno de Dirichlet homogêneas e a segunda com condições de contorno de Dirichlet não homogêneas. Para a resolução é utilizado o software Octave versão 4.0.0 [9].

Exemplo 1: Considere o seguinte problema de Poisson em duas dimensões,

$$u_{xx} + u_{yy} = -\sin x \cos y \quad , \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi),$$

sujeita às condições de contorno seguintes,

$$u(0, y) = 0,$$

$$u(\pi, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(x, \pi) = 0,$$

sabendo que a solução analítica é dada pela seguinte expressão $u(x, y) = \frac{1}{2} \sin x \sin y$.

Para a resolução numérica foram utilizadas discretizações iguais tanto para o eixo x como para o eixo y. As malhas geradas correspondem a 6, 11, 21, 41 e 81 divisões respectivamente.

A Figura 1 mostra o gráfico da solução aproximada do problema proposto, utilizando o esquema de diferenças finitas com 9 pontos com refinamento de malha com 81 divisões iguais.

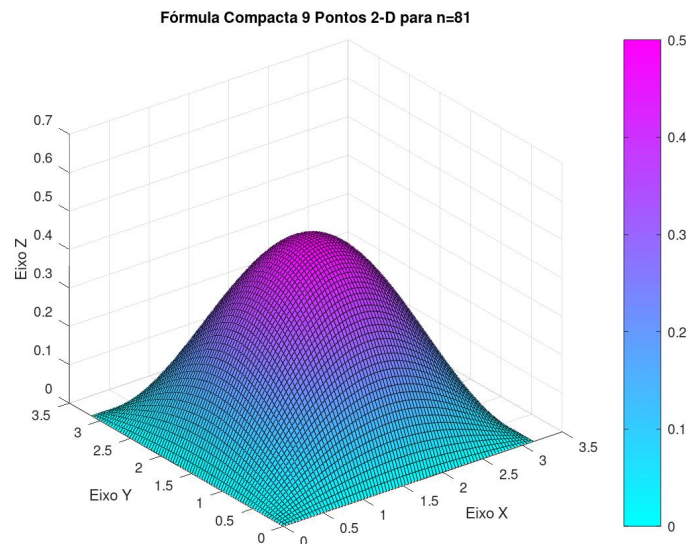


Figura 1: Exemplo 1 com o método com 9 pontos.

Na Tabela 1 tem-se a norma L^2 da diferença entre a solução aproximada e a solução analítica nos pontos de malha.

Tabela 1: Tabela de erros para diferentes valores de n, exemplo 1.

n	Erro 5 pontos	Erro 9 pontos
6	4.1948E-01	8.4423E-02
11	5.0663E-02	4.1394E-02
21	2.9293E-02	2.0596E-02
41	1.0832E-02	1.0285E-02
81	5.2532E-03	5.1410E-03

Exemplo 2: Considere o seguinte problema de Poisson em duas dimensões,

$$u_{xx} + u_{yy} = -6(x - y) + 2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1,$$

sujeita às condições de contorno seguintes,

$$u = x^2(1 - x) \quad : \text{ nos contornos horizontais do quadrado,}$$

$$u = y(1 - y)^2 \quad : \text{ nos contornos verticais do quadrado,}$$

sabendo que a solução analítica é dada pela seguinte expressão $u(x, y) = x^2(1 - x) + y(1 - y)^2$.

Assim como no exemplo anterior, para a resolução numérica foram utilizadas discretizações iguais tanto para o eixo x como para o eixo y. As malhas geradas correspondem a 6, 11, 21, 41 e 81 divisões respectivamente.

A Figura 2 mostra o gráfico da solução aproximada do problema proposto com as condições de contorno diferentes de zero, utilizando o esquema de diferenças finitas com 9 pontos com refinamento de malha com 81 divisões iguais.

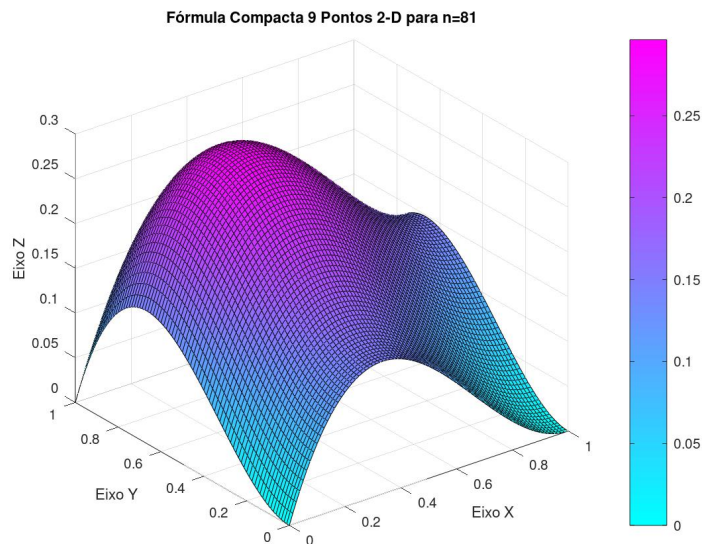


Figura 2: Exemplo 2 com o método com 9 pontos.

Na Tabela 2 tem-se a norma L^2 da diferença entre a solução aproximada e a solução analítica nos pontos de malha.

Tabela 2: Tabela de erros para diferentes valores de n , exemplo 2.

n	Erro 5 pontos	Erro 9 pontos
6	1.5202E-16	4.0627E-16
11	4.4203E-16	2.6415E-15
21	9.9961E-16	1.8571E-14
41	1.5359E-15	1.5413E-13
81	7.3191E-15	1.2136E-12

Na Figura 3 observa-se uma comparação do tempo de processamento computacional dos algoritmos de 5 e 9 pontos para o exemplo 2.

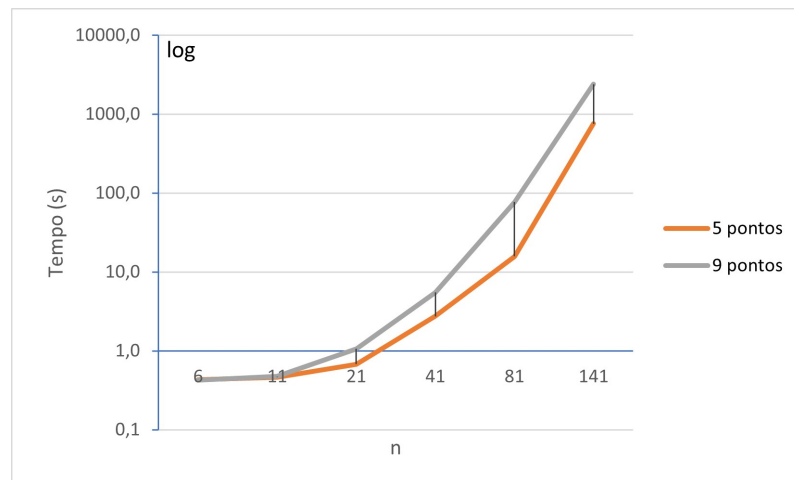


Figura 3: Tempo de processamento computacional com 5 e 9 pontos .

5 Considerações Finais

O presente trabalho apresenta a formulação de diferenças finitas com 5 e 9 pontos, para resolver a equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet. Os exemplos são apresentados para a formulação com 5 e 9 pontos e os resultados são comparados com a solução analítica. Observa-se que o erro apresentado no exemplo 2 é da ordem de 10^{-14} em média e que indica uma precisão muito boa. É natural levantar o questionamento sobre a comparação dos resultados entre as formulações com 5 e 9 pontos. Mas os resultados mostram uma diferença mínima quando comparados os gráficos, com uma pequena melhora para a formulação com 9 pontos. A explanação destes resultados será apresentado em outro artigo pois existem limitações de espaço neste trabalho.

É preciso ainda estudar os problemas apresentados considerando condições de contorno de Neumann, que serão apresentados posteriormente.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

Referências

- [1] S. K. Avendaño et al. “Visco-Acoustic modeling in the frequency domain using a mixed-grid finite-difference method and attenuation-dispersion model”. Em: **Brazilian Journal of Geophysics** 37.2 (2019), pp. 131–144. DOI: 10.22564/rbgf.v37i2.1996.
- [2] R. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. 3a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. ISBN: 978-8522123407.
- [3] J. Charl-Hyun, Ch. Shin e J. H. Suh. “An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator”. Em: **Geophysics** 61.2 (1996), pp. 529–537. DOI: 10.1190/1.1443979.
- [4] A. H.-D Cheng e D. T. Cheng. “Heritage and early history of the boundary element method”. Em: **Engineering analysis with boundary elements** 29.3 (2005), pp. 268–302. DOI: 10.1016/j.enganabound.2004.12.001.
- [5] R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy. “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics”. Em: **IBM Journal of Research and Development** 11.2 (1967), pp. 215–234. DOI: 10.1147/rd.112.0215.
- [6] L. Hall. **The Solution of Partial Differential Equations by Finite Difference Approximations: Analysing the Relative Performance of Differing Numerical Finite Difference Schemes using Taylor Series Expansions**. 1a. ed. England: Independently published, 2018. ISBN: 9781720010432.
- [7] L. V. Kantorovich e V. I. Krylov. **Approximate Methods of Higher Analysis**. 1a. ed. USA: Dover Publications, 2018. ISBN: 978-0486821609.
- [8] R. J. LeVeque. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations**. 1a. ed. Philadelphia: Siam, 1955. ISBN: 9780898716290.
- [9] S. Linge e H. P. Langtangen. **Programming for Computations - MATLAB/Octave**. 1a. ed. New York: Springer, 2010. ISBN: 978-3-319-32451-7.
- [10] G. D. Smith. **Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods**. 3a. ed. Oxford: Clarendon Press, 1986. ISBN: 0-19-859650-2.
- [11] V. Thomée. “From finite differences to finite elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 128.1 (2001), pp. 1–54. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00507-0.