

Solução Numérica das Equações de Saint-Venant por Diferenças Finitas

André Luiz dos Santos¹

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas

Diego Samuel Rodrigues²

Faculdade de Tecnologia, Universidade Estadual de Campinas

João Frederico da Costa Azevedo Meyer³

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas

A modelagem de escoamentos em canais se mostra relevante em se tratando de problemas relacionados a enchentes e inundações, os quais podem ser consequência de aumentos repentinos de vazões a montante. Este trabalho tem por propósito estudar e revisar métodos de soluções numéricas para as equações de Saint-Venant [1], as quais são as mais indicadas para tais situações nas quais fluidos escoam em canais artificiais e naturais considerados unidimensionais. Tal interesse se deve ao fato de que é nas equações de Saint-Venant que se baseiam modelagens mais complexas relativas a extravasamentos e inundações hidráulicas em áreas urbanas.

Em etapa anterior à solução numérica, o trabalho também tem como propósito estudar a dedução de equações de águas rasas a partir das equações de Navier-Stokes [2], deduzindo-as passo a passo, do 3D ao 1D. Isso se deve ao fato de que a literatura da área carece de apresentações mais explícitas e detalhadas, não só a respeito de como as equações são derivadas, mas também sobre a especificação de condições de contorno, inclusive numericamente. Na forma de leis de conservação, as equações de Saint-Venant podem ser escritas como [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{q}(\mathbf{u}, x, t), \quad (1)$$

em que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gA \frac{\partial h}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(\mathbf{u}, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gA(S_f - S_b) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

sendo $Q(x, t)$ a descarga, $A(x, t)$ a área molhada, $h(x, t)$ o nível d'água, g a aceleração da gravidade, S_b a declividade do leito e S_f o termo de fricção que é definido pela equação de Manning [3]

$$S_f = \frac{n^2 |Q| Q}{A^2 R^{4/3}}, \quad R = \frac{A}{P}, \quad (3)$$

em que n é o coeficiente de rugosidade de Manning, R é o raio hidráulico e P é o perímetro molhado.

Para a solução numérica da equação (1), utilizamos um método de diferenças finitas estabilizado, o esquema de Lax difusivo [1]:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \alpha \mathbf{u}_i^n + (1 - \alpha) \left(\frac{\mathbf{u}_{i+1}^n + \mathbf{u}_{i-1}^n}{2} \right) - \frac{\Delta t_n}{2\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)) + \Delta t_n \mathbf{q}(\mathbf{u}_i^n, x_i, t_n), \quad (4)$$

¹a194116@dac.unicamp.br

²diego.rodrigues@ft.unicamp.br

³joni@ime.unicamp.br

com a seguinte condição CFL para escolha adaptativa do passo de tempo

$$\Delta t_n \leq (1 - \alpha)c_r \left(\frac{\Delta x}{\max_{\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{u}_{\max}} \rho(\mathbf{s})} \right) \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (5)$$

em que $\rho(\mathbf{s})$ é o raio espectral do jacobiano de \mathbf{f} avaliado em \mathbf{s} , e c_r é o número de Courant [1].

Como primeiro teste numérico escolhemos um problema conhecido como *Dam-Break* [4]. Na Figura 1 é exibida a condição inicial do problema para $h(x, t)$, em que há uma contenção inicial do fluido na origem do eixo x , a ser liberado a jusante com velocidade inicial nula.

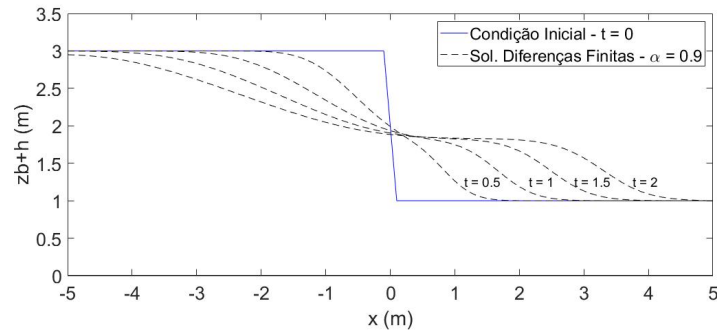


Figura 1: Solução do problema de *Dam-Break*.

As condições de contorno para esse problema são $Q(-5, t) = Q(5, t) = 0$. Nele foi utilizado $\Delta x = 0.1$, tendo sido obtida uma solução adequada, a despeito de a malha não ser muito refinada, o que gera uma menor difusão indesejada da solução (resultados omitidos). Conforme o tempo evolui, a solução suaviza-se, por razões físicas e, devido à difusão artificial, também por razões numéricas.

Nos próximos passos do trabalho serão estudados outros tipos de escoamentos que envolvem regime supercrítico, condições de contorno mistas, tal como ocorre no caso do salto hidráulico. Também serão implementados outros métodos numéricos, como o método de Hartree [1], o qual baseia-se no método das características para interpolar a solução nos pontos da malha.

Agradecimentos

Os autores agradecem o GT “Engenharia Matemática” do Grupo de Pesquisa e Ação em Conflitos Riscos e Impactos Associados a Barragens (CRIAB) pelas motivação oferecida para o desenvolvimento deste trabalho. Agradecimentos à Pós-Graduação em Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP e à FAEPEX PRP-UNICAMP pela bolsa de mestrado de ALS, Processo #2503/2021.

Referências

- [1] Hubert Chanson. **Environmental Hydraulics for Open Channel Flows**. Elsevier, 2004.
- [2] Olgierd Cecil Zienkiewicz e Robert Leroy Taylor. **The Finite Element Method**. Vol. 3: Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [3] Rodrigo de Melo Porto. **Hidráulica Básica**. 4ª edição - EESC-USP São Carlos, 2006.
- [4] Randall J LeVeque et al. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Vol. 31. Cambridge University Press, 2002.