Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Uma construção de cografos coespectrais

Fernando C. Tura[1]
Departamento de Matemática-UFSM, Santa Maria, RS

Resumo. Um grafo pode ser associado a uma matriz através de uma regra pré-estabelecida e assim podemos determinar o seu espectro, determinando o espectro da matriz associada. Dados dois grafos, dizemos que eles são coespectrais se eles possuem o mesmo espectro. A construção de grafos coespectrais podem auxiliar a estabelecer padrões sobre informações estruturais de grafos que não são preservadas pelo espectro. Nesse trabalho, apresentamos uma construção de cografos coespectrais em relação a matriz Laplaciana.

Palavras-chave. Matriz Laplaciana, Cografos, Grafos Coespectrais.

1 Introdução

A teoria de grafos é o estudo de objetos (vértices) e suas relações (arestas). Modelos de sistemas de rede, usam grafos, como redes de comunicação, onde dois centros são conectados se puderem enviar sinais entre si. À medida que essas redes crescem, torna-se mais difícil e mais complicado de entender as informações estruturais. Uma forma de entendermos grafos de grande dimensão é através de ferramentas da Álgebra Linear, e isso requer uma maneira de descrever grafos por meio de matrizes.

Grafos podem ser associados com matrizes atribuindo as entradas da matriz correspondente a estrutura do grafo. Por exemplo, atribuindo 1 a entrada a_{ij} se existir uma aresta entre os vértices v_i e v_j e 0 caso contrário. A teoria espectral de grafos é o estudo que relaciona o espectro (conjunto dos autovalores) de um grafo com as propriedades estruturais do grafo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e M uma matriz associada ao grafo. O espectro de M, denotado por $Spec_M(G)$, consiste no espectro de G com relação a M. Se dois grafos G e H possuem o mesmo espectro com relação a M, isto é $Spec_M(G) = Spec_M(H)$, então dizemos que G e H são grafos coespectrais. No caso em que G não é isomorfo ao grafo H, isso é uma interessante relação de dois grafos, uma vez que eles podem fornecem informações estruturais dos grafos que não são preservadas pelo espectro.

Construções de grafos coespectrais tem sido estudadas para diversas matrizes, dentre elas: matriz de adjacência, matriz laplaciana e matriz distância. A matriz de adjacência A tem atribuição 1 a entrada a_{ij} se existir uma aresta entre os vértices v_i e v_j e 0 caso contrário. Dois vértices são adjacentes, denotado por $u \sim v$, se $uv \in E$. O grau de um vértice, denotado por $d(v)$, é o número de vertices que são adjacentes a v. A matriz Laplaciana é definida como $L = D - A$, onde D denota a matriz diagonal dos graus dos vértices. O objetivo desse trabalho é apresentarmos uma construção de cografos não isomorfos e coespectrais em relação a matriz Laplaciana.

2 Preliminares

A seguir, G denota um grafo com n vértices e $\overline{G}$ denota seu grafo complementar. Agora, apresentaremos algumas definições e operações de grafos que serão usadas nesse trabalho. Para

[1]fernando.tura@ufsm.br

isso, sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos disjuntos:

- A *união* dos grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$ cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2$.
- A *junção* dos grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \otimes G_2$ obtido de $G_1 \cup G_2$ pela ligação de todo vértice de G_1 a cada vértice de G_2.

Um cografo é um grafo simples que não contém caminho de quatro vértices com subgrafo induzido, ou seja, um cografo é um grafo livre de P_4. Uma definição equivalente (ver [1]) é que cografos podem ser obtidos recursivamente através da seguinte regra: (i) um grafo com um único vértice é um cografo, (ii) a união e a junção de dois cografos são cografos.

Uma importante subclasse de cografos são os grafos threshold. Grafos threshold também podem ser definidos em termos de subgrafos proibidos, ou seja, eles são grafos livres de $\{P_4, 2K_2, C_4\}$. Para mais propriedades de grafos threshold, indicamos o livro [2].

Denotamos por $Spec_L(G) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n = 0\}$ o espectro Laplaciano de G. É bem conhecido que o espectro Laplaciano de $G_1 \cup \ldots \cup G_k$ é a união dos espectros Laplacianos de $G_1, \ldots, G_k$, enquanto que o espectro Laplaciano do grafo complementar de G com n vértices, consiste dos valores $n - \mu_i$, para cada autovalor Laplaciano μ_i de G, exceto para um único autovalor 0 de G.

Lema 2.1. *Seja G um grafo de n vértices com a matriz Laplaciana $L(G)$. Sejam $0 = \mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \ldots \leq \mu_2 \leq \mu_1$ os autovalores de $L(G)$. Então os autovalores Laplacianos de $\overline{G}$ são*

$$0 \leq n - \mu_1 \leq n - \mu_2 \leq n - \mu_3 \leq \ldots \leq n - \mu_{n-1}$$

com os correspondentes autovetores.

Demonstração. Note que a matriz Laplaciana de $\overline{G}$ satisfaz $L(\overline{G}) = nI + J - L(G)$, onde I é a matriz identidade e J é a matriz com todas entradas iguais 1. Portanto, para $i = 2, \ldots, n$, se x é um autovetor de $L(G)$ correspondente a μ_i, então $Jx = 0$. Assim

$$L(\overline{G})x = (nI + J - L)x = nIx + Jx - Lx = (n - \mu_i)x.$$

Então $n - \mu_i$ é um autovalor com x_i sendo o autovetor correspondente. Finalmente, $e = (1, \ldots, 1)$ é um autovetor de $L(\overline{G})$ correspondente ao autovalor 0. □

Teorema 2.1. *Sejam G_1 e G_2 grafos com n_1 e n_2 vértices, respectivamente. Sejam $L(G_1)$ e $L(G_2)$ as matrizes Laplacianas de G_1 e G_2, respectivamente, e seja L a matriz Laplaciana de $G_1 \otimes G_2$. Se $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_{n_1}$ e $0 = \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_{n_2}$ são os autovalores de $L(G_1)$ e $L(G_2)$, respectivamente, então os autovalores de L são*

$$0,\ \ n_2 + \alpha_2,\ \ n_2 + \alpha_3, \ldots,\ n_2 + \alpha_{n_1}$$

$$n_1 + \beta_2,\ \ n_1 + \beta_3, \ldots,\ n_1 + \beta_{n_2},\ \ n_1 + n_2.$$

Demonstração. Uma vez que a junção dos grafos G_1 e G_2 pode ser vista como $G_1 \otimes G_2 = \overline{\overline{G_1} \cup \overline{G_2}}$, a prova segue imediatamente do Lema 2.1. □

Uma vez que cografos podem ser obtidos recursivamente pelas operações de união e junção, é conveniente representarmos essa classe de grafos por sua forma reduzida, como explicaremos a seguir. Dado um grafo $G = (V, E)$ com conjunto de vértices V e arestas E. Para $v \in V$ temos que $N(v) = \{w | \{v, w\} \in E\}$ denota a vizinhança de v. Dois vértices u e v são ditos gêmeos, se $N(v) = N(u)$. Uma partição de gêmeos em um grafo G é uma partição dos vértices em suas classes

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0324

de equivalência sob a relação de serem gêmeos, que denotamos por $V(G) = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$. Os números gêmeos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de um grafo G são os tamanhos das classes de gêmeos.

Seja G um grafo com classes de gêmeos $T_1, T_2, \ldots, T_k$. A forma reduzida do grafo G, denotada por R_G, é um subgrafo induzido formado por $\{u_1, \ldots, u_k\}$, onde $u_i \in T_i$ é um representante da classe T_i. A Figura 1 mostra um cografo G e a sua forma reduzida R_G. As classes de gêmeos são $T_1 = \{v_1, v_2\}, T_2 = \{v_3, v_4, v_5\}, T_3 = \{v_6\}$, e $T_4 = \{v_7, v_8\}$, enquanto que os números gêmeos são $t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 1$ e $t_4 = 2$.

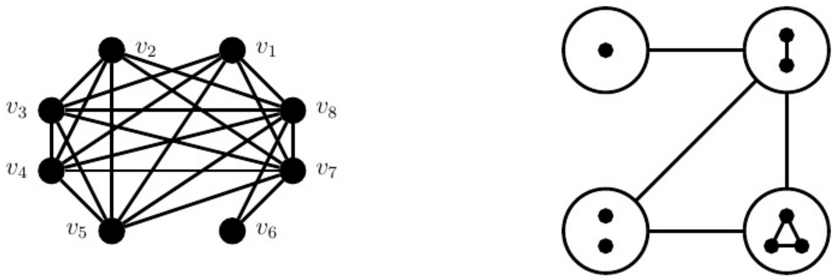

Figura 1: Um cografo e sua forma reduzida

Lema 2.2. *Seja G um cografo com classes de gêmeos $T_1, T_2, \ldots, T_k$, e seus respectivos números gêmeos $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Se d_i denota o grau de uma classe T_i então*

$$\mu(G) = \begin{cases} d_i & \textit{se } T_i \textit{ é uma coclique} \\ d_i + 1 & \textit{se } T_i \textit{ é uma clique} \end{cases}$$

é um autovalor Laplaciano de G com multiplicidade ao menos $t_i - 1$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demonstração. Seja G um cografo com classes de gêmeos $T_1, T_2, \ldots, T_k$, e seus respectivos números gêmeos $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Se T_i representa uma coclique então a matriz Laplaciana $L(G)$ tem t_i linhas idênticas. Portanto a multiplicidade de d_i como autovalor é ao menos $t_i - 1$. O resultado é análogo, se T_i é uma clique. □

Agora, apresentamos um resultado de [3], que caracteriza o espectro Laplaciano de cografos, através dos números gêmeos.

Teorema 2.2. *Seja G um cografo. Sejam $t_1, \ldots, t_k$ os números gêmeos de G, onde $d_1, \ldots, d_k$ denotam os graus das classes de gêmeos. Todo autovalor Laplaciano não nulo μ_j de G pode ser expresso como soma dos números gêmeos , ou seja,*

$$\mu_j = \sum_{i \in I_j} t_i$$

onde $I_j \subset \{1, \ldots, k\}$ representa os indices que contribuem para μ_j. Além disso, todo número gêmeo t_i contribue para d_i autovalores.

Como ilustração, apresentamos uma aplicação do Teorema 2.2. Considere o cografo G com números gêmeos $t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 1$ e $t_4 = 2$, e com respectivos graus de suas classes $d_1 = 5, d_2 = 6, d_3 = 2$, e $d_4 = 7$, como mostra a Figura 1. Temos que o $Spec_L(G) = \{8, 8, 7, 7, 7, 5, 2, 0\}$.

A Figura 2 abaixo, mostra como obter cada autovalor Laplaciano não nulo de G através da soma dos números gêmeos.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 9, n. 1, 2022.

	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$	$t_3 = 1$	$t_4 = 2$
8	x	x	x	x
8	x	x	x	x
7	x	x		x
7	x	x		x
7	x	x		x
5		x		x
2				x

Figura 2: Autovalores Laplacianos não nulos de G.

3 Cografos Coespectrais

Sejam k e l inteiros positivos tais que $k > l \geq 2$. Considere uma coleção de $k + l$ classes de gêmeos disjuntas $T_1, \ldots, T_k, T_1^*, \ldots, T_l^*$ com seus respectivos números gêmeos $t_1, \ldots, t_k, t_1^*, \ldots, t_l^*$, tais que

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{l} t_i^* = t \tag{1}$$

$$t_i = t_i^* \tag{2}$$

para $1 \leq i \leq l - 1$ e

$$\sum_{i=l}^{k} t_i = t_l^* \tag{3}$$

Definimos o cografo $\mathcal{G}$ de ordem $n = 2t = 2\sum_{i=1}^{k} t_i$, e sua forma reduzida $R_{\mathcal{G}}$, possuindo $k + l$ vértices rotulados através de suas classes de gêmeos, e seu conjunto de arestas dado por:

$$E(\mathcal{G}) = \begin{cases} t_i t_j^* & \text{for } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ and } j \in \{1, \ldots, l\} \\ \frac{t_i(t_i - 1)}{2} & \text{se } T_i \text{ (resp. } T_i^*\text{) é uma clique.} \end{cases}$$

Como ilustração, a Figura 3 mostra a forma reduzida do cografo $\mathcal{G}$.

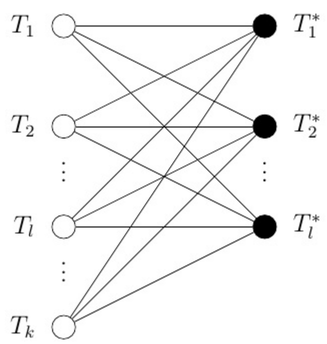

Figura 3: A forma reduzida de $\mathcal{G}$

É fácil ver que, se d_i é o grau de T_i (resp. T_i^*) em $\mathcal{G}$ então $d_i = (t_i - 1) + \sum_{i=1}^{k} t_i$, se T_i (resp. T_i^*) é uma clique e $d_i = \sum_{i=1}^{k} t_i$, se T_i (resp. T_i^*) é uma coclique.

Lema 3.1. *Seja $\mathcal{G}$ um cografo conexo de ordem $n = 2t = \sum_{i=1}^{k} t_i$ com forma reduzida $R_{\mathcal{G}}$ possuindo classes de gêmeos $T_1, \dots, T_k, \dots, T_1^*, \dots, T_l^*$ e seus respectivos números gêmeos $t_1, \dots, t_k, t_1^*, \dots, t_l^*$. Se $R_{\mathcal{G}}$ tem exatamente um par de classes de diferente tipo (T_j, T_j^*) para algum $1 \leq j \leq l-1$, então os autovalores Laplacianos de $\mathcal{G}$ são*

$$\mu_i(\mathcal{G}) = \begin{cases} t_i + t & \textit{multiplicidade } t_i - 1 \\ t & \textit{multiplicidade } (t_j - 1) + k + l - 2 \\ 2t & \textit{multiplicidade 1} \\ 0 & \textit{multiplicidade 1} \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, k + l - 1$.

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ um cografo de ordem $n = 2t = 2\sum_{i=1}^{k} t_i$ com forma reduzida $R_{\mathcal{G}}$ possuindo classes de gêmeos $T_1, \dots, T_k, T_1^*, \dots, T_k^*$, com seus respectivos números gêmeos $t_1, \dots, t_k, t_1^*, \dots, t_k^*$. Em ordem para provarmos o resultado, iremos explicitar os autovalores Laplacianos $\mu_i(\mathcal{G})$ como soma dos seus números gêmeos, de acordo com o Teorema 2.2.

Uma vez que $\mathcal{G}$ é obtido da junção de $k+l$ classes disjuntas de gêmeos, pelo Teorema 2.1, segue que cada autovalor de $\mathcal{G}$ pode ser expresso como

$$\mu_i(\mathcal{G}) = \mu_i(\overline{\mathcal{G}}) + \sum_{i=1}^{k} t_i = \mu_i(\overline{\mathcal{G}}) + t \tag{4}$$

Usando o Lema 2.2, se T_i (resp. T_i^*) é uma coclique, temos que $\mu_i(\overline{\mathcal{G}}) = 0$ e uma vez que o grau d_i de T_i (resp. T_i^*) corresponde exatamente ao número de vértices ligado a classe T_i, e assim temos que $\mu_i(\mathcal{G}) = t$. Caso contrário, temos que $\mu_i(\overline{\mathcal{G}}) = t_i - 1$, e assim $\mu_i(\mathcal{G}) = (t_i - 1) + 1 + t = t_i + t$. Note que as multiplicidades desses autovalores podem ser obtido através do Lema 2.2. Finalmente, o autovalor $2t$ é obtido da soma de $(\sum_{i=1}^{k} t_i) + (\sum_{i=1}^{l} t_i^*)$, e como zero sempre é um autovalor Laplaciano com multiplicidade 1 para grafos conexos, segue o resultado como desejado. ☐

Seja $\mathcal{G}$ um cografo de ordem $n = 2t = 2\sum_{i=1}^{k} t_i$ com forma reduzida $R_{\mathcal{G}}$ possuindo classes de gêmeos $T_1, \dots, T_k, T_1^*, \dots, T_k^*$, com seus respectivos números gêmeos $t_1, \dots, t_k, t_1^*, \dots, t_k^*$ e exatamente um par de classes de diferente tipo (T_j, T_j^*) para algum $1 \leq j \leq l-1$,

Considere o cografo $\mathcal{H}$ de ordem $n = 2t = \sum_{i=1}^{k} t_i$ e forma reduzida $R_{\mathcal{H}}$ obtido a partir de $R_{\mathcal{G}}$ pela permutação do par de classes de gêmeos distintos (T_j, T_j^*).

O seguinte resultado tem verificação imediata.

Lema 3.2. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ dois cografos de ordem $n = 2t$ e formas reduzidas $R_{\mathcal{G}}$ e $R_{\mathcal{H}}$, como definidas acima. Então $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ possuem o mesmo número de arestas e a mesma sequência de graus.*

Teorema 3.1. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ dois cografos de ordem $n = 2t$ e formas reduzidas $R_{\mathcal{G}}$ e $R_{\mathcal{H}}$, como definidas acima. Então $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são não isomorfos e coespectrais em relação a matriz Laplaciana.*

Demonstração. É fácil ver que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são grafos não isomorfos por construção. Para verificarmos o resultado, iremos mostrar que $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ compartilham os mesmos autovalores Laplacianos.

Para isso, seja $R_{\mathcal{G}}$ a forma reduzida de $\mathcal{G}$ possuindo classes de gêmeos $T_1, \dots, T_k, \dots, T_1^*, \dots, T_l^*$ com seus respectivos números gêmeos $t_1, \dots, t_k, t_1^*, \dots, t_l^*$ e exatamente um par de classes distintas (T_j, T_j^*) para algum $1 \leq j \leq l-1$. Uma vez que $R_{\mathcal{H}}$ é obtido a partir de $R_{\mathcal{G}}$ pela permutação das classes distintas (T_j, T_j^*), e $t_j = t_j^*$, segue que pelo Lema 3.2

$$d_i = \delta_i \tag{5}$$

onde d_i e δ_i são os graus das classes T_i (resp. T_i^*) em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, respectivamente. Assim para $i \neq j$ uma vez que os graus são preservados, e usando o Lema 3.1, segue que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ compartilham ao menos

$$2t - 2t_j \tag{6}$$

autovalores Laplacianos. Uma vez que $2t$ e zero são autovalores em ambos espectros, falta verificarmos então, que ambos grafos compartilham mais $2(t_j - 1)$ autovalores. Sem perda de generalidade, assumimos que T_j é uma clique enquanto que T_j^* é uma coclique. Segue do Lema 3.1 que

$$\mu(\mathcal{G}) = t_j + t = t_j^* + t = \mu(\mathcal{H}) \tag{7}$$

é um autovalor comum aos grafos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ com multiplicidade $t_j - 1 = t_j^* - 1$. De forma análoga

$$\mu(\mathcal{G}) = t = \mu(\mathcal{H}) \tag{8}$$

é um autovalor comum aos grafos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ com multiplicidade $t_j - 1$. Portanto, segue o resultado. □

Uma aplicação do Teorema 3.1, pode ser vista, através dos cografos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ com formas reduzidas ilustradas na Figura 4. Esses grafos são coespectrais, uma vez que

$$Spec_L(\mathcal{G}) = Spec_L(\mathcal{H}) = \{12, 10, 10, 10, 8, 8, 8, 6, 6, 6, 6, 0\}$$

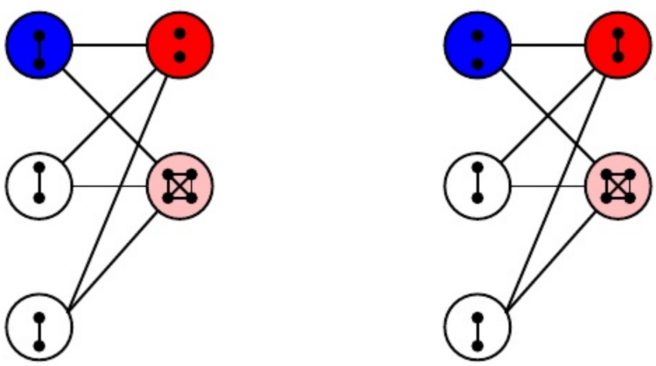

Figura 4: Cografos Coespectrais

4 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma construção simples de cografos não isomorfos e coespectrais. Tal construção foi obtida através da forma reduzida de um cografo e do resultado [3] o qual permite que os autovalores Laplacianos de cografos podem ser expressos como soma dos seus números gêmeos. Para problemas posteriores, seria interessante determinar outras formas de se obter cografos coespectrais em relação a matriz Laplaciana.

Referências

[1] Stweart B.L. Corneil D.G. Lerchs H. "Complement reducible graphs". Em: **Discrete Applied Mathematics** (1981).

[2] U.N. Mahadev N.V.R. Peled. **Threshold graphs and related topics**. 3a. ed. Amsterdan: Elsevier, 1995. ISBN: 9788529402024.

[3] Abrishami T. "A combinatorial analysis of the eigenvalues of the Laplacian matrices of cogrphs". Tese de doutorado. Master's Thesis, 2019.

